Vorrede.

Es giebt zweyerley Lehrarten, nach welchen die Jugend in die mathematiſchen Wiſſenſchaften eingeführet wird; die Synthetiſche, und die Analytiſche. Nach der Synthetiſchen werden die Wahrheiten vorgetragen, und erwieſen. Dieſes Verfahren iſt einfach, und für den Lehrer ſehr bequem; alle Lehrbücher der Anfangsgründe ſind alle nach dieſer Methode verfaſſet; der Lehrer darf ſich nur eines zum Leitfaden wählen, ſo kann er ohne vieles Nachdenken lehren. Ganz anderſt verhält es ſich in Rückſicht auf die zu unterrichtende Jugend. Die Lehrſätze kommen allemal eher vor, als die Jugend den ganzen Sinn, und die Wahrheit derſelben einſieht. Bey jedem Beweiſe, den der Lehrer führet, muß die Jugend alle Kräfte ihres Geiſtes erſchöpfen, und doch am Ende den Satz ebenſo wie den Beweis davon, ihrem Gedächt-

dächtniſſe anvertrauen. Die Jugend erkennet nur die Wahrheiten, die andere gefunden haben, ſie ſelbſt ſuchet keine; bleibt daher gern unwirkſam, und oft, troz allen Kenntniſſen, faſt zu jeder Unternehmung ungeſchickt.

Dieſer Lehrart iſt die Analytiſche ganz entgegengeſetzet. Nach dieſer werden die Wahrheiten aus dem Weſen der Gegenſtände durch eine Reihe richtiger Schlüſſe hergeleitet; der Weg zur Wahrheit wird der Jugend immer früher, als die Wahrheit ſelbſt bekannt; und nie kömmt ein Satz vor, von deſſen Richtigkeit ſie nicht ſchon zuvor überzeuget iſt, und ihn ſelbſt ausgeſprochen hat.

Es kömmt dabey nur darauf an, daß der Lehrer den Gegenſtand jeder abzuhandelnden Lehre durch jene Eigenſchaft erkläre, welche ihn mit einem ſchon unterſuchten Gegenſtande verbindet, und daß der Schüler ſodann den neuerlangten Begriff auf dieſen Gegenſtand anwende, richtig ſchließe, und jeden Schluß endlich kurz und deutlich ausdrücke.

So oft der Schüler fehlet, ſo überführet ihn der Lehrer von ſeinem Fehler, giebt ihm Gelegenheit ſolchen zu verbeſſern, und zeiget ihm alsdann

erſt,

erſt, wenn es noch nicht gelingen will, wie er vermög der gegebenen Stücke hätte vorgehen ſollen.

Selten iſt ein Jüngling mit ſo wenig Fähigkeit begabt, daß er nach ſo vielen Beyſpielen und Verſuchen nicht endlich aus dem Weſen der Gegenſtände zu folgern anfange: und iſt er einmal dazu geſchickt, ſo ſchließt er immer leicht von einer Wahrheit auf die unmittelbar folgende, und gelanget bald, durch beſtändige Uebung, zu einer ſolchen Fertigkeit richtig zu denken, daß er ſich um nichts mehr, als um die wahren Begriffe der Gegenſtände allein bekümmern darf. Dann iſt er nicht nur außer Gefahr das Erlernte zu vergeſſen; ſondern hat auch das Vermögen dasjenige durch ſich ſelbſt zu erfahren, worinn er nie einen Unterricht erhielt. Wenige Gegenſtände, nach dieſer Methode abgehandelt, ſind für einen fähigen Lehrling ſchon hinlänglich, daß er die Kräfte ſeines Verſtandes kennen und anwenden lernt; und daher zu den einem Soldaten angemeſſenen Unternehmungen ſowohl den gehörigen Muth, als die erforderliche Geſchicklichkeit erhält.

Vorrede.

Dieſe für die Militärerziehung ſo weſentlichen Vortheile haben des Herrn Geniekorpskommandanten Feldzeugmeiſters Grafen von Pellegrini Excellenz bewogen, die analytiſche Lehrart in der kaiſerl. königl. Ingenieursakademie einzuführen. Hochderſelben Befehle zu Folge, habe ich gedachte Lehrart in dieſer Akademie ſchon mehrere Jahre hindurch mit gutem Erfolge ausgeübet; und nunmehr mit Zuratheziehung meines Directors des Herrn Obriſtlieutenants d'Avrange endlich gegenwärtige Analytiſche Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik verfaßt. Wird ſie mit jenem Eifer für den Allerhöchſten Dienſt auch allgemein aufgenommen werden, mit dem ſie verordnet und niedergeſchrieben wurde; ſo kann ich keinen Augenblick zweifeln, daß man mir das Vergnügen gönnen wird, das reine und volle Vergnügen, welches aus erfüllter Schuldigkeit fließt, und dem Untergebenen durch den Beyfall ſeiner Obern ſchätzbar wird,

der Verfaſſer.

Inhalt
dieſes erſten Theiles.

Seite

Von den verſchiedenen Methoden die Zahlen durch Ziffern auszudrücken 1
Vom Addiren der ungenannten und genannten Zahlen . . 13
Vom Abziehen ebenderſelben 17
Von den bejahenden und verneinenden Größen 22
Von den algebraiſchen Zahlen 24
Vom Addiren der bejahenden und verneinenden Zahlen . . 25
Vom Abziehen ebenderſelben 27
Vom Multipliciren mit ungenannten Zahlen 31
Vom Dividiren mit ebendenſelben 42
Vom Multipliciren mit algebraiſchen Zahlen 62
Vom Multipliciren mit bejahenden und verneinenden Zahlen. 65
Vom Dividiren mit algebraiſchen Zahlen 69
Vom Dividiren mit bejahenden und verneinenden Zahlen . . 72
Von jeder Zahl alle einfachen Factoren zu finden 76
Von jeder Zahl alle Theiler zu finden 82
Von jeden zwoen Zahlen den größten gemeinen Theiler zu finden 85
Von der Verbindung der Factoren mit ihrem Producte überhaupt 89
Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen 92
Von den zehntheiligen Brüchen 122
Vom Multipliciren und Dividiren mit genannten Zahlen . . 138
Von der Auflöſung der gemeinſten Aufgaben 150
Von den beſtimmten Gleichungen und Aufgaben des erſten Grades 159
Von den unbeſtimmten Gleichungen und Aufgaben des erſten Grades 195
Und zwar 1tens von den Aufgaben, welche auf eine ſolche Gleichung führen $bx - ay = c$ 198

2tens

Inhalt.

Seite

2tens Von jenen, welche auf dieſe Gleichung leiten bx + ay = c 211
Von der Rechnung mit Exponenten 227
Von Ausziehung der Quadratwurzel aus zuſammengeſetzten algebraiſchen Ausdrücken 242
Von Ausziehung der Quadratwurzel aus ungenannten und genannten Zahlen 245
Von den beſtimmten Gleichungen und Aufgaben des zweyten Grades 259
Und zwar 1tens von beſtimmten Aufgaben, welche auf reine quadratiſche Gleichungen leiten 262
2tens Von jenen, welche auf vermiſchte quadratiſche Gleichungen führen 272
Von dem arithmetiſchen Verhältniſſe zwoer Größen 279
Von der arithmetiſchen Proportion 281
Von der ſteten arithmetiſchen Proportion 285
Von dem geometriſchen Verhältniſſe zwoer Größen 286
Von dem zuſammengeſetzten Verhältniſſe 289
Von der geometriſchen Proportion 294
Von der ſteten geometriſchen Proportion 304
Anwendung der Lehre der Proportionen 306
Die Meßkunſt.
Von den einfachſten Gegenſtänden der Meßkunſt 329
Von den geraden Linien, welche von jedem Punkte bis auf einen Umfang gezogen ſind 341
Von den geraden Linien, welche von jedem Punkte auf eine andere gerade Linie gezogen ſind 349
Von den Senkrechten, welche von den Punkten einer Gerade auf eine andere Gerade gezogen ſind 362
Von dem Maße der Winkel auſſer dem Mittelpunkte 377
Von den Winkeln geradlinigter Figuren 386
Von dem Vierecke 393
Von der Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren 397
Von der Lage der geraden Linien und Ebenen 403
Von den ähnlichen Dreyecken 415
Von den ähnlichen Figuren 444

Die allgemeine Rechenkunſt.

I.

Alles dasjenige, zu dem ſich etwas hinzuſetzen, oder davon hinwegnehmen läßt, wird Größe genennet.

Z. B. Ein Stück Tuch, eine gewiſſe Anzahl Gulden, Kreuzer, Pferde und dergleichen.

2. **Einheit wird jede Größe genennet, die man dafür annehmen will.**

Z. B. Ein Gulden, ein Kreuzer, ein Menſch, auch dreyßig Menſchen, ein halber Gulden, zwanzig Kreuzer. u. d. g.

3. **Mehrere gleichnamige Einheiten machen eine Zahl aus.**

Z. B. Iſt die Einheit ein Menſch; ſo ſind dreyßig Menſchen eine Zahl. Iſt die Einheit ein Pferd, ein Hund, ein Löwe; ſo geben ſie, unter dieſen Namen betrachtet keine Zahl: denn es ſind weder drey Pferde, weder drey Hunde, noch drey Löwen. Setzet man aber die Einheit ſey ein Thier; ſo machen ein Pferd, ein Hund und ein Löwe drey Thiere, folglich eine Zahl aus.

4. Wird bey einer Zahl der Namen der Einheit ausgeſprochen; ſo heißt ſolche eine **genannte Zahl**; wie zwanzig Gulden, dreyßig Kreuzer, acht Thiere: ſpricht

man aber den Namen der Einheit nicht aus; ſo wird ſie eine **ungenannte Zahl**, wie Drey, Zehn, Zwanzig genennt.

5. Jede ungenannte Zahl begreift in ſich alle genannten, die aus eben ſo viel Einheiten als jene beſtehen. So kann die Zahl **Fünfe**, fünf Pferde, fünf Löwen, fünf Gulden, kurz, jede fünf gleichnamigen Einheiten bedeuten. Die ungenannte Zahl hat alſo eine allgemeine Bedeutung; und daher iſt alles, was von ungenannten Zahlen wahr iſt, auch allemal von jeden gleichnamigen genannten wahr, die eben ſo viel Einheiten als jene enthalten. Wenn z. B. fünf und zwey gleich ſieben iſt; ſo werden auch fünf Pferde und zwey Pferde ſo viel als ſieben Pferde, fünf Hunde und zwey Hunde ſo viel als ſieben Hunde u. ſ. f. ausmachen.

6. Eine Zahl mag ſo groß ſeyn, als man immer will; ſo läßt ſich doch noch eine denken, die eine Einheit mehr als die vorige enthält. Es wachſen alſo die Zahlen, die immer um eine Einheit von einander unterſchieden ſind, von der Einheit an, ohne Ende fort.

7. Ziffern ſind nichts anders als Zeichen, wodurch man die Zahlen ausdrücket.

8. Man ſoll Ziffern angeben, wodurch man alle Zahlen, die immer um eine Einheit von einander unterſchieden ſind, bequem ausdrücken könne.

9. Das Einfachſte, das einem bey dieſer Aufgabe einfallen kann, mag wohl dieſes ſeyn; daß man für die Einheit eine Ziffer z. B. dieſe (1) annehme, und ſie jedesmal ſo oft nach einander ſetze, als die Zahl, welche man ausdrücken will, Einheiten in ſich enthält, und, wie folgt, ſchreibe:

I.........eins	IIII....vier
II.........zwey	IIIII....fünf
III.........drey	IIIIII....ſechs

10. Dieſe Methode iſt freylich ſehr mühſam; allein es iſt auch nicht ſchwer einzuſehen, daß ſie ſich ſehr abkürzen läßt, wenn man für größere Zahlen wieder beſondere Ziffern annimmt.

So ließen die Römer

dieſe Ziffer . . V . . fünf,	dieſe . . C . . hundert,
dieſe . . X . . zehn,	dieſe . . D . . fünfhundert, und
dieſe . . L . . fünfzig,	dieſe . . M . . tauſend,

gelten, und ſetzten voraus: daß eine niedrigere Ziffer, vor einer höhern geſetzt, nichts anders anzeigen ſoll, als um wie viel Einheiten dieſe weniger als ſonſt bedeute. Dieſemnach drückten ſie ſich, wie folgt aus:

I.	eins	XX.	zwanzig
II.	zwey	XXX.	dreyßig
III.	drey	XL.	vierzig
IV.	vier	L.	fünfzig
V.	fünf	LX.	ſechzig
VI.	ſechs	LXX.	ſiebenzig
VII.	ſieben	LXXX.	achtzig
VIII.	acht	XC.	neunzig
IX.	neun	C.	hundert
X.	zehn	CC.	zweyhundert
XI.	eilf	CCC.	dreyhundert
XII.	zwölf	CD.	vierhundert
XIII.	dreyzehn	D.	fünfhundert
XIV.	vierzehn	DC.	ſechshundert
XV.	fünfzehn	DCC.	ſiebenhundert
XVI.	ſechzehn	DCCC.	achthundert
XVII.	ſiebenzehn	CM.	neunhundert
XVIII.	achtzehn	M.	tauſend
XIX.	neunzehn	MM.	zweytauſend
			und ſo fort.

11. Noch beſſer kann jene Methode die Zahlen auszudrücken abgekürzet werden, wenn man anſtatt mehr bedeutende Ziffern anzunehmen, dieſer (1), da ſie öfters nach

einander geſchrieben iſt, nach ihren verſchiedenen Stellen verſchiedene Werthe beylegt: ſie bedeute z. B. (die Stellen von der Rechten zur Linken gerechnet) in der erſten Stelle, eins; in der zwoten, zwey; in der dritten, vier; in der vierten, acht; in der fünften, ſechzehn; in der ſechſten, zwey und dreyßig; u. ſ. f. in einer höhern allemal wieder noch ſo viel als in der nächſt niedrigern; ſo werden die Werthe der Stellen, wie folgt, zu ſtehen kommen:

zwey und dreyßig	ſechzehn	acht	vier	zwey	eins
I	I	I	I	I	I

und dieſe Ziffern

I...... eins,	IIII.. fünfzehn,
II...... drey,	IIIII.. ein und dreyßig,
III...... ſieben,	IIIIII.. drey und ſechzig. u. ſ. f.

bedeuten. Allein nach dieſer Vorausſetzung, können die mittlern Zahlen noch nicht ausgedrücket werden. Es bedeutet zwar (I) in der zwoten Stelle, zwey; in der dritten, vier; in der vierten, acht; u. ſ. f. Allein die zwote Stelle kann nicht ohne die erſte; die dritte, nicht ohne die zwote und erſte; und die vierte, nicht ohne die dritte, zwote und erſte geſetzet werden. Folglich läßt ſich auch zwey, nicht ohne eins; vier, nicht ohne zwey und eins; und acht, nicht ohne vier, zwey und eins ausdrücken. Es iſt alſo noch eine Ziffer vonnöthen, z. B. die Nulle (0), die nichts anders als eine leere Stelle anzuzeigen hat. Dieſes angenommen, ſo bedeuten folgende Ziffern:

10.... zwey,	1000.. acht
100.... vier	10000.. ſechzehn, u. ſ. f.

Und

Und die mittlern Zahlen können ausgedrücket werden, wenn man anſtatt der Nulle allemal, wo es vonnöthen iſt, wieder (1) ſeßet, wie folgt:

1.	eins	10001.	ſiebenzehn
10.	zwey	10010.	achtzehn
11.	drey	10011.	neunzehn
100.	vier	10100.	zwanzig
101.	fünf	10101.	ein u. zwanzig
110.	ſechs	10110.	zwey u. zwanzig
111.	ſieben	10111.	drey u. zwanzig
1000.	acht	11000.	vier u. zwanzig
1001.	neun	11001.	fünf u. zwanzig
1010.	zehn	11010.	ſechs u. zwanzig
1011.	eilf	11011.	ſieben u. zwanzig
1100.	zwölf	11100.	acht u. zwanzig
1101.	dreyzehn	11101.	neun u. zwanzig
1110.	vierzehn	11110.	dreyßig
1111.	fünfzehn	11111.	ein u. dreyßig
10000.	ſechzehn	100000.	zwey u. dreyßig
			u. ſ. f.

12. Nehmen wir noch eine bedeutende Ziffer zwey (2) an; ſo können wir den Werth beeder um das Dreyfache wachſen laſſen, ſo daß jede Einheit, in der zwoten Stelle, drey; in der dritten, neun; in der vierten, ſieben und zwanzig u. ſ. f. gelte; und alle Zahlen, wie folgt, noch kürzer ausdrücken:

1.	eins	101.	zehn
2.	zwey	102.	eilf
10.	drey	110.	zwölf
11.	vier	111.	dreyzehn
12.	fünf	112.	vierzehn
20.	ſechs	120.	fünfzehn
21.	ſieben	121.	ſechzehn
22.	acht	122.	ſiebenzehn
100.	neun	200.	achtzehn

 201.

201. . neunzehn	221. . fünf u. zwanzig
202. . zwanzig	222. . ſechs u. zwanzig
210. . ein u. zwanzig	1000. . ſieben u. zwanzig
211. . zwey u. zwanzig	1001. . acht u. zwanzig
212. . drey u. zwanzig	1002. . neun u. zwanzig
220. . vier u. zwanzig	1010. . dreyßig u. ſ. f.

13. Eben ſo kann man vier Ziffern (1,2,3, und 0,) annehmen, ihre Werthe um das Vierfache wachſen laſſen, und wie folgt, ſchreiben:

1. . eins	100. . ſechzehn
2. . zwey	101. . ſiebenzehn
3. . drey	102. . achtzehn
10. . vier	103. . neunzehn
11. . fünf	110. . zwanzig
12. . ſechs	111. . ein u. zwanzig
13. . ſieben	112. . zwey u. zwanzig
20. . acht	132. . dreyßig
21. . neun	220. . vierzig
22. . zehn	302. . fünfzig
23. . eilf	330. . ſechzig
30. . zwölf	331. . ein und ſechzig
31. . dreyzehn	332. . zwey und ſechzig
32. . vierzehn	333. . drey und ſechzig
33. . fünfzehn	1000. . vier und ſechzig u. ſ. f.

14. Nimmt man fünf Ziffern (1,2,3,4, und 0,) an, und läßt ihre Werthe um das Fünffache wachſen; ſo kann man die Zahlen wieder, wie folgt, ausdrücken:

1. . . eins	13. . . acht
2. . . zwey	14. . . neun
3. . . drey	20. . . zehn
4. . . vier	21. . . eilf
10. . . fünf	22. . . zwölf
11. . . ſechs	23. . . dreyzehn
12. . . ſieben	24. . . vierzehn

30.

30. .	fünfzehn	220. .	ſechzig
31. .	ſechzehn	240. .	ſiebenzig
32. .	ſiebenzehn	310. .	achtzig
33. .	achtzehn	330. .	neunzig
34. .	neunzehn	400. .	hundert
40. .	zwanzig	420. .	hundert u. zehn
41. .	ein u. zwanzig	440. .	hundert u. zwanzig
42. .	zwey u. zwanzig		
43. .	drey u. zwanzig	444. .	hundert vier und zwanzig
44. .	vier u. zwanzig		
100. .	fünf u. zwanzig	1000. .	hundert fünf und zwanzig
110. .	dreyßig		
130. .	vierzig	1001. .	hundert ſechs u. zwanzig u. ſ. f.
200. .	fünfzig		

15. Hieraus iſt es leicht einzuſehen, daß man eben ſo mit ſechs Ziffern (1,2,3,4,5,0)

mit ſieben Ziffern (1,2,3,4,5,6,0,)
mit acht Ziffern (1,2,3,4,5,6,7,0,)
mit neun Ziffern (1,2,3,4,5,6,7,8,0,)
mit zehn Ziffern (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,)

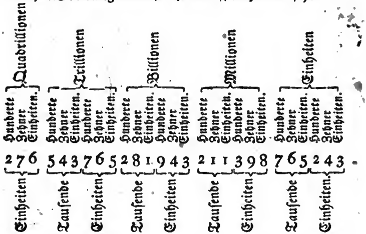
und mit noch mehr Ziffern, wenn man will, alle möglichen Zahlen ausdrücken kann, wenn man nur allemal darunter eine Nulle annimmt, und ihre Werthe um das Ebenſovielfache wachſen läßt, als man Ziffern angenommen hat.

16. Man könnte die Werthe der Ziffern auch von der Linken zur Rechten wachſen laſſen: denn dieſes würde in den Zahlgebäuden nichts ändern, als daß bey jeder Zahl die Ziffern in verkehrter Ordnung zu ſtehen kämen.

17. Je mehr Ziffern man annimmt, deſto kürzer kann eine gröſſere Zahl ausgedrücket werden. So gilt in dem Zahlgebäude von zwoen Ziffern (1000) nicht mehr als Acht; und in jenem von fünf Ziffern bedeutet (1000) ſchon Hundert fünf und zwanzig.

18. Aus allen dieſen unendlich vielen Zahlgebäuden, die alle unſerer Aufgabe ein Genügen leiſten, hat man jenes von zehn Ziffern gewählet, und angenommen, daß ihre Werthe von der Rechten zur Linken um das Zehnfache wachſen ſollen. Jetzt iſt ſchon die Sprache darnach eingerichtet; und es dürfte ſchwer fallen, wenn man ſich an ein anderes gewöhnen ſollte.

19. Mit was für Namen man die verſchiedenen Werthe der Ziffern in jeder Stelle andeute, in welcher Ordnung man ſolche ausſpreche und ſchreibe?



Die Stellen werden, wie in dem vorangeſchriebenen Beyſpiele zu erſehen, von der Rechten zur Linken in Hauptklaſſen eingetheilet, deren jede ſechs Stellen in ſich enthält. Dieſe Klaſſen heiſſen von der niedrigſten angefangen, **Einheiten, Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quinquillionen** u. ſ. f.

Jede Hauptklaſſe wird wieder in zwo kleinere Klaſſen, jede von drey Stellen, eingetheilt; die niedrigere behält den Namen **Einheit**, die höhere aber wird durch das Wort **Tauſend**, ausgedrückt.

Die drey Stellen jeder kleinen Klaſſe heiſſen, von der niedrigſten angefangen, **Einheiten, Zehner, Hunderte.**

Der

Der Werth endlich, den man der Figur der Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.) beylegt, wird durch **eins, zwey, drey, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun**, ausgedrückt.

Was die Ordnung anbelangt, in welcher dieſe verſchiedenen Werthe auszuſprechen ſind, iſt folgendes zu beobachten:

Erſtens: Wird das Wort Einheit beym Leſen und Diktiren nie ausgeſprochen:

Zweytens: ſpricht man bey jeder Ziffer den Werth ihrer Figur, ſodann jenen ihrer Stelle aus. Daher wird in der höchſten Stelle einer kleinen Klaſſe geſprochen:

einhundert oder hundert	ſechshundert
zweyhundert	ſiebenhundert
dreyhundert	achthundert
vierhundert	neunhundert.
fünfhundert	

In der mittlern Stelle aber ſagt man:

zehn anſtatt ein Zehner	ſechzig anſtatt ſechs Zehner
zwanzig anſtatt zwey Zehner	ſiebenzig anſtatt ſieben Zehner
dreyßig anſtatt drey Zehner	achtzig anſtatt acht Zehner
vierzig anſtatt vier Zehner	neunzig anſtatt neun Zehner.
fünfzig anſtatt fünf Zehner	

Weil das Wort **Einheit** nie ausgeſprochen wird, ſo nennt man in der niedrigſten Stelle nur den Werth der Figur.

Drittens: wird in jeder kleinen Klaſſe die höchſte Ziffer, ſodann die niedrigſte, und endlich die mittlere ausgeſprochen.

Daher ließt man:

425 vierhundert fünf und zwanzig
743 ſiebenhundert drey und vierzig
851 achthundert ein und fünfzig.

Viertens: wird in jeder Hauptklaſſe die Klaſſe der Tauſende vor der Klaſſe der Einheiten ausgeſprochen; jene genennt, dieſe aber nicht.

Daher lieſt man:

426789	426tauſend 789.
8677	8tauſend 677.
24931	24tauſend 931.

Fünftens: wird die höchſte Hauptklaſſe zuerſt, ſodann die nächſt niedrigere, u. ſ. f. bis zum Ende geleſen; alle auſſer die letzte werden genennt.

Sechſtens: wenn in einer Stelle eine Nulle ſteht; ſo wird dieſe Stelle nicht geleſen: und wenn in einer Klaſſe lauter Nullen ſtehen, ſo wird auch dieſe nicht genennt.

Daher lieſt man:

405	vierhundert und fünf
600	ſechshundert
4004	viertauſend und vier
70006	ſiebenzigtauſend und ſechs
800050	achthundert tauſend und fünfzig
24000500	vier und zwanzig Millionen und fünfhundert.

Damit wir bey einer groſſen Zahl die Klaſſen deſto leichter von einander unterſcheiden können, ſo wollen wir die kleinen durch einen Punkt (.), die Hauptklaſſen aber durch Striche, und zwar die erſte von der zwoten durch einen Strich (,); die zwote von der dritten durch zween Striche (,,), die dritte von der vierten durch drey Striche (,,,), u. ſ. f. abſondern.

Dieſem zu Folge wird die obige Zahl
276,,,,543.765,,,281.943,,211.398,765.243
alſo ausgeſprochen: 276 Quadrillionen, 543 Tauſend 765 Trillionen, 281 Tauſend 943 Billionen, 211 Tauſend 398 Millionen, 765 Tauſend 243.

Die-

Dieſe: 34,,005.002,600.201
34 Billionen, 5 Tauſend und 2 Millionen, 600 Tauſend 201.

Dieſe: 4,,,000.089,,500.600,070.001

4 Trillionen, 89 Billionen, 500 Tauſend 600 Millionen, 70 Tauſend und 1.

Und dieſe: 5.210,,,000.000,,000.050,005.060

5 Tauſend 210 Trillionen, 50 Millionen, 5 Tauſend und 60.

Bey dem Schreiben iſt nur darauf wohl Acht zu geben, daß, wenn nach einer höhern Stelle oder Klaſſe nicht die nächſt niedrigere diktirt wird, man ja dieſelbe Stelle oder Klaſſe mit Nullen zu bezeichnen nicht vergeſſe.

Es ſeyen hundert Millionen, vierhundert und fünftauſend, ſiebenhundert und eins zu ſchreiben.

Schreibe die Klaſſe der Millionen 100, ſodann jene der Tauſende 405, und endlich jene der Einheiten 701, ſo wie ſie ſind diktirt worden, nach einander hin; ſo wird dieſe Zahl: 100, 405.701 zum Vorſchein kommen. Hier ſind die zwo niedrigſten Stellen in der Klaſſe der Millionen; die mittlere in jener der Tauſende und in jener der Einheiten mit 0 bezeichnet worden, weil im Diktiren keine von dieſen Stellen genennet wurde.

Es ſeyen zwanzig Billionen, zwey und fünfzig Tauſend und eins zu ſchreiben.

Schreibe die Klaſſe der Billionen 20, jene der Millionen 000000, jene der Tauſende 052, und endlich jene der Einheiten 001; ſo wird die verlangte Zahl dieſe ſeyn.

20,,000.000, 052.001.

Weil von der Stelle der Einheiten in der Klaſſe der Billionen, von der ganzen Klaſſe der Millionen, von der höchſten Stelle in der Klaſſe der Tauſende, und den zwo höchſten in der Klaſſe der Einheiten im Diktiren nichts gemeldet wurde; ſo waren ſolche mit Nullen zu bezeichnen.

Es

Es ſeyen endlich ſiebenhundert und ein Tauſend und fünfzig Trillionen, acht Billionen, achthundert und vierzig Millionen, ſieben Tauſend und achtzig zu ſchreiben.

Schreibe die Klaſſe der Trillionen 701050, jene der Billionen 000008, jene der Millionen 000840, und endlich die Hauptklaſſe der Einheiten 007080; ſo iſt die verlangte Zahl dieſe:

701.050,,,000.008,,000.840,007.080

Hier wurden im Diktiren bey den Trillionen von der Klaſſe der Tauſende die mittlere, von der Klaſſe der Einheiten die erſte und letzte Stelle; bey den Billionen die ganze Klaſſe der Tauſende und die zwo erſten Stellen von der Klaſſe der Einheiten; bey den Millionen wieder die ganze Klaſſe der Tauſende und die letzte Stelle von der Klaſſe der Einheiten; bey der Hauptklaſſe der Einheiten endlich die zwo erſten Stellen von der Klaſſe der Tauſende, und die erſte und letzte Stelle von der kleinen Klaſſe der Einheiten verſchwiegen: darum mußten jene Nullen geſetzet werden.

20. Man ſieht leicht ein, daß die Namen, mit denen man die verſchiedenen Werthe der Ziffern in verſchiedenen Stellen andeutet, ſo wie die Ordnung, in welcher man ſolche ausſpricht, willkührlich angenommen iſt, und daß folglich eine geſchriebene Zahl bey den Franzoſen nicht mehr und nicht weniger als bey den Deutſchen bedeute, obgleich jene ihr einen höhern Namen beylegen als wir gewöhnt ſind.

Sie drücken ſich auf folgende Art aus:

Octillionen	Septillionen	Sextillionen	Quinquillionen	Quadrillionen	Trillionen	Billionen	Millionen	Tauſende	Einheiten.
340	256	789	200	421	674	305	067	087	673

21. Es kann öfters geſchehen, daß man anſtatt mehrerer Zahlen wie 32451 und 26136 nur eine verlangt, die eben ſo viel als jene ausmache. Paul iſt einem 32451 fl. und einem andern 26136 fl. ſchuldig; und man fragt, wie viel Paul überhaupt ſchuldig iſt?

Wie dergleichen Fragen ein Genügen geſchehen möge, wollen wir nun überhaupt unterſuchen.

Vom Addiren.

22.

Es heißt eine Zahl finden, welche mehreren gegebenen Zahlen gleich iſt.

Die geſuchte Zahl wird die Summe der gegebenen genennt.

23. Jede Zahl beſteht aus lauter gleichnamigen Einheiten; die Summe aber muß die nämlichen Einheiten als die gegebenen Zahlen in ſich enthalten; ſonſt könnte ſie denſelben nicht gleich ſeyn. Daher iſt die Summe von ungleichnamigen Zahlen nicht anzugeben. So iſt von 3 Pferden und 2 Ochſen die Summe weder 5 Pferde, noch 5 Ochſen, und vielweniger 5 Schaafe oder was immer für eine andere Zahl.

24. So lange die gegebenen Zahlen noch einzelne, das iſt, ſolche ſind, die nur mit einer Ziffer ausgedrücket werden; ſo können ſie gar leicht addiret werden. So ſieht jeder bald ein, daß von 7 fl. und 2 fl. die Summe 9 fl; von 5 fl, 2 fl. und 4 fl, die Summe 11 fl; und von 7, 8, und 6 die Summe 21 iſt.

25. Sind aber die gegebenen Zahlen wie 32451 und 26136 aus Einheiten, Zehnern, Hunderten, Tauſenden u. ſ. f. zuſammengeſetzet; ſo kömmt es blos darauf an, daß wir eine Zahl finden, die eben ſo viel Einheiten, Zehner, Hunderte, Tauſende u. ſ. f. als die gegebenen in ſich enthält. Wir addiren daher die Einheiten, ſodann

die Zehner, ſodann die Hunderte, kurz, alle gleichnamigen Theile der gegebenen Zahlen von dem niedrigſten bis zu dem höchſten, und ſetzen aus den gefundenen beſondern Summen der Einheiten, der Zehner, der Hunderte u. ſ. f. wieder eine Zahl zuſammen; ſo wird dieſe die verlangte Summe ſeyn. Dieſes mit mehrerer Bequemlichkeit zu verrichten, wollen wir die gegebenen Zahlen ſo ſchreiben, daß ihre gleichnamigen Theile gerad untereinander zu ſtehen kommen, ſie mit einem Striche unterziehen, und die Summen der gleichnamigen Theile unter den Strich in ihre gehörige Stelle ſetzen; wie folgt:

32451	die gegebenen Zahlen
26136	
58587	ihre Summe.

26. Sind, wie in dieſem Beyſpiele, die Summen der Einheiten, der Hunderte, der Tauſende u. ſ. f. allemal einzelne Zahlen; ſo geben ſie, unter den Strich in ihre Stelle geſchrieben, ſogleich die verlangte Summe. Sind aber dieſe beſondern Summen wieder aus Einheiten und Zehnern zuſammengeſetzet; ſo können wir ſie beſonders ſchreiben, und ſodann von dieſen beſondern Summen wieder die Summe ſuchen; wie aus folgendem Beyſpiele zu erſehen.

Es ſeyen	134589	die gegebenen Zahlen;
	64395	
	674679	
ſo iſt	23	die Summe der Einheiten
	240	die Summe der Zehner
	1400	die Summe der Hunderte
	12000	die Summe der Tauſende
	160000	die Summe der Zehntauſende
	700000	die Summe der Hunderttauſende
und	873663	die Summe aller beſondern Summen, alſo auch der gegebenen Zahlen.

27.

27. Wenn wir betrachten, daß, ſo oft eine beſondere Summe aus zwoen Ziffern beſteht, die niedrigere derſelben jedesmal gleichnamig iſt mit den Theilen, welche man wirklich addiret, die höhere aber mit jenen, die man unmittelbar darauf addiren wird: ſo können wir die Mühe, jene beſondern Summen zu ſchreiben und darauf zu addiren erſparen, wenn wir von jeder beſondern Summe nur die niedrigere Ziffer ſchreiben, die höhere aber ſogleich zu den darauf folgenden höhern Theilen zählen.

Dieſemnach ſchreiben wir in dem vorigen Beyſpiele

(134589 }
64395 } die gegebenen Zahlen
674679 }

873663 ihre Summe)

von der Summe der Einheiten 23 die 3 Einheiten und zählen die 2 Zehner zu den Zehnern der gegebenen Zahlen; eben ſo ſchreiben wir von der Summe der Zehner 260 die 6 Zehner und zählen die 2 Hunderte zu den Hunderten der gegebenen Zahlen; von der Summe der Hunderte 1600 ſchreiben wir wieder nur 6 Hunderte und zählen 1 Tauſend zu den Tauſenden der gegebenen Zahlen u. ſ. f; ſo erhalten wir ohne weitere Mühe die unter dem Striche ſtehende Summe wie zuvor.

28. Auf eine ähnliche Art können wir zu Werke gehen, wenn genannte Zahlen mit angehängten verſchiedenen Theilen der Einheit zu addiren ſind. Z. B. Gulden, Kreuzer und Heller. Wir ſuchen nämlich die Summe der Heller, ſodann jene der Kreuzer, und endlich jene der Gulden; ſo wird die Zahl, welche aus dieſen beſondern Summen beſteht, die Summe der gegebenen Zahlen ſeyn.

	fl.	kr.	Hl.	
Es ſeyen	5	13	5	die gegebenen Zahlen;
	340	15	6	
	340	46	7	
	3	6	2	
ſo iſt	689	22	4	ihre Summe.

Denn 20 Heller iſt ſo viel als 2 Kreutzer und 4 Heller, und 82 Kreutzer wieder ſo viel als 1 Gulden und 22 Kreutzer.

	Klaftern.	Schuh.	Zoll.	
Es ſeyen	240	5	9	die gegebenen Zahlen;
	35	3	7	
	4567	2	6	
ſo iſt	4843	5	10	ihre Summe.

Denn, weil die Klafter aus 6 Schuhen, und der Schuh aus 12 Zollen beſteht; ſo geben 22 Zoll, 1 Schuh und 10 Zoll; und 11 Schuh, 1 Klafter und 5 Schuh.

	Tage.	Stunden.	Minuten.	
Es ſeyen	9	13	35	die gegebenen Zahlen;
	2	15	42	
	5	2	3	
ſo iſt	17	7	20	ihre Summe.

Denn, weil 1 Tag, 24 Stunden; und 1 Stunde, 60 Minuten ausmacht; ſo geben 80 Minuten, 1 Stund und 20 Minuten; und 31 Stunden, 1 Tag und 7 Stunden.

29. Wenn was immer für zwo gleichnamige Zahlen gegeben ſind, wie 32451 und 26136; ſo können wir nunmehr jedesmal auch ihre Summe, 58587 finden. Es könnte ſich aber ereignen, daß uns dieſe Summe 58587 nebſt einer von jenen Zahlen 32451 bekannt wäre, und

daß

daß wir die andere 26136 zu ſuchen hätten. Ich war z. B. dem Paul 58587 fl. ſchuldig, und zahlte ihm 32451 fl. Nun iſt die Frage, wieviel ich ihm noch zu bezahlen habe? Gewiß eine ſolche Anzahl Gulden, die zu 32451 fl. addirt, 58587 fl. giebt. Wie dieſes zu bewerkſtelligen ſey, wird itzt unterſuchet.

Vom Abziehen.

30.

Es heißt nichts anders, als aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen, und einer aus dieſen zwoen Zahlen die andere finden.

Die geſuchte Zahl wird der gegebenen Unterſcheid genannt.

31. Weil die Summe mit jenen Zahlen, woraus ſie beſteht, nothwendig gleichnamig iſt; ſo können ungleichnamige Zahlen eben ſo wenig voneinander abgezogen als zuſammen addirt werden.

32. **Man ſoll 5 von 12 abziehen**, will alſo ſoviel ſagen, als 12 iſt die Summe zwoer Zahlen, und 5 iſt eine davon; man ſoll die andere finden. Dieſe andere muß alſo ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie, zu 5 addirt, 12 giebt; daher ſieht man bald, daß 6 zu klein, (denn 6 und 5 giebt erſt 11), daß 8 zu groß, (denn 8 und 5 giebt 13) und daß endlich 7 der verlangte Unterſcheid iſt, weil von 7 und 5 die Summe 12 iſt. Wer in dem Addiren eine Fertigkeit erhalten hat, dem kann es nicht mehr ſchwer fallen wenigſtens die einzelnen Zahlen abzuziehen; indem er, wie beym vorigen Beyſpiele, augenblicklich durch das Addiren einſieht, ob jede Zahl zu klein, zu groß, oder die verlangte iſt.

33. Sind die gegebenen Zahlen aus Einheiten, Zehnern, Hunderten, Tauſenden, u. ſ. f. zuſammengeſetzet; ſo

werden wir ihren Unterſcheid finden, wenn wir ſo wie beym Addiren verfahren, und den Unterſcheid der Einheiten, jenen der Zehner, jenen der Hunderte, jenen der Tauſende u. ſ. f. nacheinander ſuchen. Daher wollen wir Bequemlichkeit halber die gegebene Zahl ſo unter die gegebene Summe ſchreiben, daß ihre gleichnamigen Theile wieder gerad unter einander zu ſtehen kommen, ſie mit einem Striche unterziehen, und die beſondern Unterſcheide unter den Strich in ihre gehörige Stelle ſchreiben, damit dieſe uns ſogleich den verlangten Unterſcheid geben.

Es ſey	58587	die gegebene Summe
	32451	die gegebene Zahl;
ſo iſt	26136	ihr Unterſcheid.

Man drückt ſich dabey ſo aus: 1 von 7 bleibt 6; 5 von 8 bleibt 3; 4 von 5 bleibt 1; 2 von 8 bleibt 6; 3 von 5 bleibt 2. Und weil 6 und 1 gleich 7; 3 und 5 gleich 8; 1 und 4 gleich 5; 6 und 2 gleich 8; 2 und 3 gleich 5; ſo iſt klar, daß 26136, zu 32451 addirt, 58587 giebt, alſo der verlangte Unterſcheid iſt.

34. Wenn es ſich ereignet, daß eine Ziffer in der gegebenen Zahl größer iſt, als ihre gleichnamige in der gegebenen Summe, wie in dieſem Beyſpiele,

(937082	die gegebene Summe
462537	die gegebene Zahl)

in welchem 7 von 2; 5 von 0; und 6 von 3 abzuziehen iſt: ſo ſetzen wir in der Stelle der Summe 10 mehr, und in der nächſthöhern Stelle ebenderſelben 1 weniger; weil 1 in einer höhern Stelle allemal 10 in der nächſtniedrigern gilt. Dieſemnach muß man ſich voriges Beyſpiel in Gedanken, wie folgt, vorſtellen:

(8	(13)	6	(10)	7	(12)	die gegebene Summe
4	6	2	5	3	7	die gegebene Zahl;
4	7	4	5	4	5	ihr Unterſcheid)

Und

Und ſagen: 7 von 12 bleibt 5; 3 von 7 bleibt 4; 5 von 10 bleibt 5; 2 von 6 bleibt 4; 6 von 13 bleibt 7; 4 von 8 bleibt 4.

Ebenſo wenn	42135621	die gegebene Summe
	16548219	die gegebene Zahl;
ſo iſt	25587402	ihr Unterſcheid.

Denn 9 von 11 bleibt 2; 1 von 1 bleibt 0; 2 von 6 bleibt 4; 8 von 15 bleibt 7; 4 von 12 bleibt 8; 5 von 10 bleibt 5; 6 von 11 bleibt 5; und 1 von 3 bleibt 2.

35. Wenn in der Stelle der Summe, in welcher wir ſollten 1 weniger ſetzen, eine 0 ſteht, wie im folgenden Beyſpiele:

(4000502 die gegebene Summe
2567346 die gegebene Zahl)

ſo nehmen wir die nächſthöhere bedeutende Ziffer um 1 kleiner, ſetzen dafür in der nächſtniedrigern Stelle, die mit einer 0 bezeichnet iſt, nicht 10, ſondern nur 9, damit uns noch 1 bleibe, dafür wir in der folgenden niedrigern Stelle wieder 10 ſetzen können. Dieſem zu Folge können wir uns vorgelegtes Beyſpiel alſo vorſtellen:

(3	9	9	(10)	4	9	(12)	die gegebene Summe
2	5	6	7	3	4	6	die gegebene Zahl
1	4	3	3	1	5	6	ihr Unterſcheid.

Und ſprechen: 6 von 12 bleibt 6; 4 von 9 bleibt 5; 3 von 4 bleibt 1; 7 von 10 bleibt 3; 6 von 9 bleibt 3; 5 von 9 bleibt 4; und 2 von 3 bleibt 1.

Denn die Einheit, welche wir in der ſiebenden Stelle weglaſſen, gilt 10 in der ſechſten: hier laſſen wir nur 9 ſtehen; ſo haben wir wieder 10 für die fünfte: hier laſſen wir abermal nur 9 ſtehen; ſo bleiben uns noch 10 für die vierte. Ebenſo ſetzen wir für die Einheit, die

 wir

wir in der dritten Stelle weglaſſen, 9 in der zwoten, und 10 in der erſten.

Ebenſo wenn	9000000	die gegebene Summe
	3456782	die gegebene Zahl;
ſo iſt	5543218	ihr Unterſcheid.

Denn wenn wir in der ſiebenten Stelle 1 weglaſſen; ſo können wir dafür in der ſechſten, fünften, vierten, dritten, und zwoten 9, und in der erſten 10 ſetzen, und folglich ſagen: 2 von 10 bleibt 8; 8 von 9 bleibt 1; 7 von 9 bleibt 2; 6 von 9 bleibt 3; 5 von 9 bleibt 4; 4 von 9 bleibt 5; und 3 von 8 bleibt 5.

36. Wenn genannte Zahlen mit angehängten verſchiedenen Theilen der Einheit voneinander abzuziehen ſind; ſo kann man ebenſo verfahren, und ſo oft in der gegebenen Summe zu wenig Theile ſind, ein Ganzes weniger und dafür ſoviel Theile mehr ſetzen als ein Ganzes ausmachen. Daher

	fl.	kr.	hl.	
wenn	43	0	0	die gegebene Summe
	17	54	6	die gegebene Zahl;
ſo iſt	25	5	2	ihr Unterſcheid.

Denn auſtatt 1 fl. ſetzen wir in der gegebenen Summe 59 kr. und 8 hl.

	fl.	kr.	hl.	
Wenn	345	13	2	die gegebene Summe
	47	52	7	die gegebene Zahl;
ſo iſt	297	20	3	ihr Unterſcheid.

Denn anſtatt 1 kr. ſetzen wir 8 Heller, und anſtatt 1 fl. wieder 60 Kreutzer.

	Klaftern.	Schuh.	Zoll.	
Wenn	10	0	0	die gegebene Summe
	3	5	9	die gegebene Zahl;
ſo iſt	6	0	3	ihr Unterſcheid.

Denn

Denn anſtatt 1 Klafter ſetzen wir in der gegebenen Summe 5 Schuh und 12 Zoll.

	Kl.	Sch.	Zoll.	
Wenn	456	2	7	die gegebene Summe
	329	5	11	die gegebene Zahl;
ſo iſt	126	2	8	ihr Unterſcheid.

Denn anſtatt 1 Schuhs, ſetzen wir 12 Zoll, und wieder anſtatt 1 Klafter 6 Schuh.

	Tage.	Stunden.	Minuten.	
Wenn	14	0	0	die gegebene Summe
	3	20	47	die gegebene Zahl;
ſo iſt	10	3	13	ihr Unterſcheid.

Denn anſtatt 1 Tages ſetzen wir 23 Stunden und 60 Minuten.

	Tage.	St.	Min.	
Wenn	13	9	32	die gegebene Summe
	9	18	54	die gegebene Zahl;
ſo iſt	3	14	38	ihr Unterſcheid.

Denn anſtatt 1 Stunde ſetzen wir 60 Minuten, und anſtatt 1 Tages wieder 24 Stunden.

37 Bisher iſt immer in der Stille vorausgeſetzet worden, daß die gegebene Summe größer ſey, als die gegebene Zahl. Wenn nun die gegebene Zahl größer iſt, als die gegebene Summe, wie da 12 von 7 abzuziehen iſt; was iſt alsdann zu thun? Es kömmt freilich nur darauf an, daß man eine Zahl finde, welche, zu 12 addirt, 7 ausmache: allein da 12 ſchon größer als 7 iſt; ſo wird jede Zahl, zu 12 addirt, allemal wieder eine größere hervorbringen als 7 iſt; außer ſie wäre ſo beſchaffen, daß ſie zu 12 addirt, ſo viel Einheiten von der Zahl 12 zernichten würde, um wieviel derſelben 12 mehr als 7 enthält. Dergleichen Zahlen wollen wir itzt kennen lernen.

Von den bejahenden und verneinenden Größen.

38.

Es ſind jene Größen, welche einander gerad entgegen geſetzet ſind.

Wie Vermögen, und Schulden; der Weg rechts und der Weg links; der Weg hinauf, und jener herunter, u. d. gl. Man kann aus zwoen entgegengeſetzten Größen für **bejahend** annehmen welche man will; ſodann aber iſt jedesmal die andere **verneinend**. Nehme ich Vermögen für bejahend an; ſo ſind Schulden verneinend: oder will ich Schulden bejahend nennen; ſo iſt Vermögen für verneinend anzuſehen.

39. Wer 100 fl. Vermögen und 100 fl. Schulden hat, der hat ſoviel als nichts. Geht einer drey Stuffen der Stiege hinauf, und wieder drey Stuffen derſelben herunter; ſo iſt es ſoviel, als wäre er ſtehen geblieben.

Die 100 fl. Schulden zernichten alſo jene 100 fl. Vermögen; und die 3 Stuffen, die jener herunter gegangen, zernichten die 3 Stuffen, die er hinauf geſtiegen iſt.

Es geht einer von Wien nach Paris: er war ſchon 30 Meilen von Wien entfernt; nun iſt er wieder 10 Meilen zurück gegangen, alſo hat er in allem wirklich 40 Meilen Wegs gemacht, und doch iſt er itzt nicht mehr als 20 Meilen von Wien entfernt. Es müſſen alſo die 10 Meilen, die er gegen Wien gemacht, 10 von jenen 30 Meilen, die er von Wien gegangen, zernichten. In dieſem Verſtande ſagt man alſo recht:

Gleiche bejahende und verneinende Größen heben einander auf.

40. Den bejahenden Größen wird dieſes Zeichen + (**mehr**), und den verneinenden dieſes — (**weniger**) vorgeſchrieben. So bedeutet + 7 (**mehr** 7) nichts anders

ders als 7 bejahende, und — 7 (**weniger** 7) nichts anders als 7 verneinende Einheiten.

41. Es bedeutet dieſes Zeichen (=) **gleich**; ſo iſt, weil gleiche bejahende und verneinende Größen einander aufheben,

$+7-7=0$,	$-9+4=-5$,
$+9-9=0$,	$+20-30=-10$,
$+9-4=+5$,	$-1+8=+7$;

und weil die bejahenden einander nicht, und die verneinenden einander auch nicht aufheben,

$$+7+9=+16,$$
$$-7-9=-16.$$

Hieraus iſt leicht einzuſehen, daß man ſolche durch Zeichen zuſammengeſetzten Ausdrücke abkürzen kann: wenn man die kleinere aus jenen, die ungleiche Zeichen haben von der größern abzieht, und dem Unterſcheide das Zeichen der größern giebt; jene aber, die gleiche Zeichen haben, zuſammen addirt, und der Summe wieder daſſelbe Zeichen läßt.

Eben daher iſt auch $+8-5+6-3+4-9=+1$.

Denn $+8-5$ giebt $+3$, | $+6+4$ giebt $+10$ und
$+3+6$ giebt $+9$, | $+10-9$ giebt $+1$.
$+9-3$ giebt $+6$, |

Da die abgekürzten Ausdrücke, wie $+1$, allemal viel bequemer und deutlicher ſind als die zuſammengeſetzten, wie $+8-5+6-3+4-9$; ſo iſt dieſe Abkürzung, wo ſie immer nur ſtatt findet, anzubringen.

42. Das Zeichen (+) wird beym erſten Ausdrucke, und unmittelbar nach dem Zeichen der Gleichheit (=) nie ausgedrücket, ſondern ohnehin dadurch verſtanden, daß man nicht dieſes (—) ſchreibt, oder ausſpricht.

So lieſt und ſchreibt man:

$7-4=3$, anſtatt $+7-4=+3$
$9-5=4$, anſtatt $+9-5=+4$.

Es iſt daher wohl zu merken, daß die Zahl, deren Zeichen man verſchweigt, allemal für bejahend zu halten iſt.

Von den Algebraiſchen Zahlen.

43.

Wir haben ſchon geſehen, daß die ungenannten Zahlen eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als die genannten: 5 fl. kann z. B. nur von 5 fl. und von nichts anders geſagt werden: da hingegen die ungenannte Zahl (5) jeden 5 gleichnamigen Einheiten zukömmt. Allein die ungenannte Zahl (5) kann doch nicht 4, nicht 6, nicht 2, nicht 3, nicht 10 Einheiten, ja keine Menge gleichnamiger Einheiten als 5 derſelben bedeuten.

Es ſind alſo noch allgemeinere Zahlen möglich, ſolche, die eine jede Menge gleichnamiger Einheiten in ſich begreiffen; und dieſe heißen algebraiſche Zahlen. Man drücket ſie aus, durch a, b, c, d, e, f, u. ſ. f.

Es bedeutet alſo a jede Zahl; und ebenſo bedeutet auch b eine jede Zahl wie a; a und b aber bedeuten was immer für zwo; a, b u d c, was immer für drey; a, b, c und d, was immer für vier; und a, b, c, d und e, was immer für fünf Zahlen, u. ſ. w.

Wer a fl. ſagt, der drückt jede Anzahl Gulden ohne Ausnahme aus; und wer a fl. und b fl. ſagt, der drücket jede zwo Anzahlen Gulden abermal ohne Ausnahme aus.

Was

Was ſich von a und b ſagen läßt, das läßt ſich auch von jeden zwoen gleichnamigen Zahlen ſagen: und was von a, b, c und d, wahr iſt, das iſt auch von was immer für vier gleichnamigen Zahlen wahr.

44. Man hat darum den Buchſtaben eine ſo allgemeine Bedeutung beygelegt; daß man ein bequemes Mittel habe ſich allgemein auszudrücken, und allgemeine Unterſuchungen anzuſtellen, um dadurch allgemeine Wahrheiten zu entdecken, die ſodann für einzelne Fälle als Regeln dienen können.

45. Es bedeute nun a und b was immer für zwo Zahlen; ſo laſſen ſich doch folgende zuſammengeſetzte Ausdrücke noch immer, wie folgt abkürzen:

$$-5b - 6b = -11b,$$
$$3a + 2a = 5a,$$
$$5a - 3a = 2a,$$
$$-9b + 4b = -5b,$$
$$3a + 7b - 8a = 7b - 5a,$$
$$17a + 6b - 11a - 13b = 6a - 7b.$$

Vom Addiren der bejahenden und verneinenden Zahlen.

46.

Addiren heißt nichts anders, als eine Zahl finden, die den gegebenen gleich iſt.

Daher wenn $\left.\begin{matrix}+a\\+b\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $+a+b$ ihre Summe:

wenn $\left.\begin{matrix}+a\\-b\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $+a-b$ ihre Summe:

wenn $\left.\begin{matrix}-a\\+b\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $-a+b$ ihre Summe:

und wenn $\left.\begin{matrix}+a\\-b\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $-a-b$ ihre Summe.

Denn die zuſammengeſetzte Zahl $(+a+b)$, $(+a-b)$, $(-a+b)$ und $(-a-b)$ iſt ſonder Zweifel jedesmal gleich den zween Theilen, woraus ſie beſteht.

Da nun a und b alle nur möglichen Zahlen bedeuten; ſo können wir allgemein ſchließen: daß man die Summe von was immer für zwoen Zahlen findet, wenn man eine nach der andern, jede mit ihrem Zeichen, hinſchreibt.

Es ſeyen $\left.\begin{matrix}+12\\+18\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $+12+18=30$ ihre Summe:

Es ſeyen $\left.\begin{matrix}+8\\-5\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $+8-5=3$ ihre Summe:

Es ſeyen $\left.\begin{matrix}-9\\+2\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $-9+2=-7$ ihre Summe:

Es ſeyen $\left.\begin{matrix}-10\\-5\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $-10-5=-15$ ihre Summe:

Es ſeyen $\left.\begin{matrix}9a-5b+7c\\-4a+7b-12c\end{matrix}\right\}$ die gegebenen Zahlen;

ſo iſt $9a-4a-5b+7b+7c-12c=$ $5a+2b-5c$ ihre Summe.

47. Wenn wie in dieſem Beyſpiele eine Abkürzung ſtatt findet; ſo kann man die gegebenen Zahlen ſo wie ſie ſtehen als Theile der Summe anſehen, und ſogleich die Abkürzung vornehmen, damit man auf einmal für die Summe den kürzeſten Ausdruck erhalte.

So kann man in eben dieſem Beyſpiele

$$\left.\begin{array}{l} 9a - 5b + 7c \\ -4a + 7b - 12c \end{array}\right\} \text{die gegebenen Zahlen;}$$
$$\overline{5a + 2b - 5c} \quad \text{ihre Summe)}$$

ohne die gegebenen Zahlen nacheinander zu ſchreiben ſagen: $+9a - 4a$ giebt $+5a$, $-5b + 7b$ giebt $+2b$, und $+7c - 12c$ giebt $-5c$.

Ebenſo wenn
$$\left.\begin{array}{l} 17a - 9b + 7c \\ +3d \\ -5a + 9b - 9c \end{array}\right\} \text{die gegebenen Zahlen;}$$
ſo iſt $12a - 2c + 3d$ ihre Summe:

Denn $+17a - 5a$ giebt $+12a$; $-9b + 9b$ giebt 0; $+7c - 9c$ giebt $-2c$.

Vom Abziehen der bejahenden und verneinenden Zahlen.

48.

Abziehen heißt, aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen, und einer aus dieſen zwoen Zahlen, die andere finden.

Dieſe andere muß daher ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie, zu der gegebenen Zahl addirt, die gegebene Summe ausmacht.

Da-

Daher wenn $+a$ } die gegebene Summe
$+b$ } die gegebene Zahl;

ſo iſt $+a-b$ ihr Unterſcheid.

Denn $+a-b$, zu $+b$ addirt, giebt $+a-b+b=+a$.

Wenn $+a$ die gegebene Summe
$-b$ die gegebene Zahl;

ſo iſt $+a+b$ ihr Unterſcheid.

Denn $+a+b$, zu $-b$ addirt, giebt $+a+b-b=+a$.

Wenn $-a$ die gegebene Summe
$+b$ die gegebene Zahl;

ſo iſt $-a-b$ ihr Unterſcheid.

Denn $-a-b$, zu $+b$ addirt, giebt $-a-b+b=-a$.

Und wenn $-a$ die gegebene Summe
$-b$ die gegebene Zahl;

ſo iſt $-a+b$ ihr Unterſcheid.

Denn $-a+b$, zu $-b$ addirt, giebt $-a+b-b=-a$.

Man findet daher allemal den Unterſcheid, wenn man die gegebene Summe mit ihrem Zeichen, und die gegebene Zahl mit entgegengeſetztem Zeichen nacheinander hinſchreibt.

Es ſey 7 die gegebene Summe
12 die gegebene Zahl;

ſo iſt $7-12=-5$ ihr Unterſcheid.

Denn

Denn —5, zu 12 addirt, giebt 12—5=7.

Es ſey 10 die gegebene Summe
—8 die gegebene Zahl;

ſo iſt 10+8=18 ihr Unterſcheid.

Denn 18, zu —8 addirt, giebt 18—8=10.

Es ſey —3 die gegebene Summe
29 die gegebene Zahl;

ſo iſt —3—29=—32 ihr Unterſcheid.

Denn —32, zu 29 addirt, giebt —32+29 =—3.

Es ſey —7 die gegebene Summe
—30 die gegebene Zahl;

ſo iſt —7+30=23 ihr Unterſcheid.

Denn 23, zu —30 addirt, giebt 23—30=—7.

Es ſey 5a+2b—5c die gegebene Summe
9a—5b+7c die gegebene Zahl;

ſo iſt 5a—9a+2b+5b—5c—7c
=—4a+7b—12c ihr Unterſcheid.

49. Da das Abziehen blos darinn beſteht, daß man die gegebene Summe mit ihrem Zeichen, die gegebene Zahl aber mit entgegengeſeßtem Zeichen ſchreibe; ſo iſt leicht einzuſehen, daß man auch hier, wie beym Addiren, ſogleich abkürzen kann; nur ſind die Ausdrücke der gegebenen Zahl mit entgegengeſeßten Zeichen zu leſen.

So wird man in dem vorigen Beyſpiele

(5a+2b—5c die gegebene Summe
9a—5b+7c die gegebene Zahl

—4a+7b—12c ihr Unterſcheid)

ſogleich für den Unterſcheid den kürzeſten Ausdruck erhalten, wenn man ſagt: $+5a-9a$ giebt $-4a$; $+2b+5b$ giebt $+7b$; und $-5c-7c$ giebt $-12c$.

Es ſey $12a-3b+7c-13d-5e$ die gegebene Summe
$-4a-7b+3c-8d+9e$ die gegebene Zahl;
ſo iſt $16a+4b+4c-5d-14e$ ihr Unterſcheid.

Denn $12a+4a$ giebt $16a$; $-3b+7b$ giebt $+4b$; $+7c-3c$ giebt $+4c$; $-13d+8d$ giebt $-5d$; und $-5e-9e$ giebt $-14e$.

Es ſey $9a-4b+5n-3m$ die gegebene Summe
$2a+7q-3s+5m$ die gegebene Zahl;
ſo iſt $7a-4b+5n-7q+3s-8m$ ihr Unterſcheid.

Denn $9a-2a$ giebt $7a$; und $-3m-5m$ giebt $-8m$.

50. Es ſey von 6 immer wieder 1 abzuziehen; ſo kommen die Unterſcheide nach Nro. 48, wie folgt, zu ſtehen:

1 von 6, bleibt $6-1=5$;
1 von 5, bleibt $5-1=4$;
1 von 4, bleibt $4-1=3$;
1 von 3, bleibt $3-1=2$;
1 von 2, bleibt $2-1=1$;
1 von 1, bleibt $1-1=0$;
1 von 0, bleibt $0-1=-1$;
1 von -1, bleibt $-1-1=-2$;
1 von -2, bleibt $-2-1=-3$;
1 von -3, bleibt $-3-1=-4$;
1 von -4, bleibt $-4-1=-5$;
1 von -5, bleibt $-5-1=-6$;
u. ſ. f.

Wenn

Wenn man alſo von was immer für einer Zahl, wie hier 6, beſtändig 1 abzieht; ſo wird ſolche immer kleiner: zieht man endlich ſoviel Einheiten ab, als ſie enthält; ſo wird ſie gleich 0: fährt man noch weiter fort immer 1 abzuziehen; ſo wird ſie gleich — 1, — 2, — 3, — 4, — 5 — 6 u. ſ. f.

Eine verneinende Zahl iſt alſo allemal kleiner als 0, und deſto kleiner, je mehr ſie verneinende Einheiten in ſich enthält.

Dieſe Betrachtung iſt von der größten Wichtigkeit; wir werden bald einen Gebrauch davon machen.

51. Alles, was wir oben vom Addiren geſagt haben, findet allemal ſtatt, die gegebenen Zahlen mögen gleich oder ungleich ſeyn; ſind ſolche gleich wie im folgenden Beyſpiele,

(3212	
3212	die gegebenen Zahlen
3212	
3212	
12848	ihre Summe);

ſo kann man kürzer verfahren, wenn man die Zahl 3212 nur einmal ſchreibt, ſodann ihre Einheiten, ihre Zehner, ihre Hunderte u. ſ. f. alle ihre Theile ſo oft nimmt, als ſie ſollte hingeſchrieben ſeyn, und ſagt:

4 mal 2 iſt 8,	4 mal 2 iſt 8,
4 mal 1 iſt 4,	4 mal 3 iſt 12.

Wie in dergleichen Fällen zu Werke zu gehen ſey, wird itzt überhaupt unterſuchet.

Vom Multipliciren.

52.

Es heißt eine Zahl ſo oft nehmen, oder ſo oft zu 0 addiren, als es eine andere anzeigt.

Man

Man ſoll 3212 mit 4 multipliciren, will ſo viel ſagen, als man ſoll 3212 viermal nehmen, oder viermal zu 0 addiren.

Die gegebenen Zahlen wie 3212 und 4 heißen Factoren, und die geſuchte wie 12848 ihr Product, oder ihr Vielfaches.

. . . . .
. . . . .
. . . . .

53. Setzen wir 5 Puncten 3 mal untereinander; ſo haben wir auch 3 Puncten 5 mal nacheinander geſetzet:

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

und ſtehen 7 Puncten 4 mal untereinander; ſo ſtehen auch 4 Puncten 7 mal nacheinander: eben ſo werden 3212 Puncten, 4 mal unter einander geſchrieben, ebenſoviel ausmachen als 4 Puncten, 3212 mal nacheinander geſchrieben.

Es bleibt daher immer daſſelbe, ob man 5 mit 3, oder 3 mit 5; 7 mit 4, oder 4 mit 7; 3212 mit 4, oder 4 mit 3212, und überhaupt welchen Factor man mit dem andern, multiplicire.

54. Man iſt gewöhnt die Factoren durch dieſes Zeichen (×) voneinander abzuſondern, und dergleichen Ausdrücke ($3 \times 4 = 12$) ſo zu leſen: 3 multiplicirt mit 4, oder 3 mal 4 iſt 12.

55. Wer im Addiren eine Fertigkeit hat, dem wird es leicht ſeyn, folgende Tafel aus den einzelnen Factoren und ihren Producten zu verfertigen, und alsdann ſo auswendig zu lernen, daß er nicht nur aus den gegebenen Factoren ihr Product, ſondern auch aus dem gegebenen Producte und einem Factore; den andern Factor augenblicklich erkennet.

Factoren / Producten	Factoren / Producten	Factoren / Producten
1 × 1 = 1,	3 × 9 = 27,	6 × 6 = 36,
2 × 2 = 4,	3 × 10 = 30,	6 × 7 = 42,
2 × 3 = 6,	4 × 4 = 16,	6 × 8 = 48,
2 × 4 = 8,	4 × 5 = 20,	6 × 9 = 54,
2 × 5 = 10,	4 × 6 = 24,	6 × 10 = 60,
2 × 6 = 12,	4 × 7 = 28,	7 × 7 = 49,
2 × 7 = 14,	4 × 8 = 32,	7 × 8 = 56,
2 × 8 = 16,	4 × 9 = 36,	7 × 9 = 63,
2 × 9 = 18,	4 × 10 = 40;	7 × 10 = 70,
2 × 10 = 20,	5 × 5 = 25;	8 × 8 = 64;
3 × 3 = 9;	5 × 6 = 30,	8 × 9 = 72,
3 × 4 = 12;	5 × 7 = 35;	8 × 10 = 80,
3 × 5 = 15,	5 × 8 = 40;	9 × 9 = 81,
3 × 6 = 18,	5 × 9 = 45;	9 × 10 = 90,
3 × 7 = 21;	5 × 10 = 50;	10 × 10 = 100.
3 × 8 = 24;		

56. Wenn der eine Factor wie 3212 aus Einheiten, Zehnern, Hunderten u. ſ. f. zuſammengeſetzet, der andere aber wie 4 eine einzelne Zahl iſt; ſo werden wir wie oben das verlangte Vielfache erhalten, wenn wir die Einheiten, die Zehner, die Hunderte u. ſ. f. alle Theile des zuſammengeſetzten Factors ſo oft nehmen, als der einzelne Factor anzeigt, und darauf von den beſondern Vielfachen die Summe ſuchen, wie folgt.

Wenn 3212 } die Factoren;
4 }

ſo iſt	8	das 4fache der Einheiten,
	40	jenes der Zehner,
	800	jenes der Hunderte,
	12000	jenes der Tauſende,
	12848	die Summe der

beſondern Vierfachen aller Theile der Zahl 3212, alſo das 4fache dieſer ganzen Zahl.

Wenn	3897 } 6 }	die Factoren;
ſo iſt	42	das 6fache der Einheiten,
	540	jenes der Zehner,
	4800	jenes der Hunderte,
	18000	jenes der Tauſende,
und	23382	das 6fache der ganzen Zahl 3897.

57. Wenn die beſondern Producten der Einheiten, der Zehner, der Hunderte u. ſ. f. nur aus einer Ziffer beſtehen, wie im erſten Beyſpiele; ſo kann man kürzer verfahren, wenn man ſie ſogleich unter den Strich in ihre gehörige Stelle ſchreibt, wie folgt,

(3212 } 4 } die Factoren

12848 ihr Product)

und ſagt: $4 \times 2 = 8$, ‖ $4 \times 2 = 8$,
$4 \times 1 = 4$, ‖ $4 \times 3 = 12$,

Dieſelbe Abkürzung findet noch ſtatt, wenn gleich die beſondern Producten der Einheiten, der Zehner, der Hunderte u. ſ. f. aus zwoen Ziffern beſtehen, wie im zweyten Beyſpiele; wenn man jedesmal, wie beym Addiren, nur die niedrigere davon anſchreibt, die höhere aber zu dem Producte der gleichnamigen höhern Theilen zählet,

(3897 } 6 } die Factoren

23382 ihr Product)

und ſagt: $6 \times 7 = 42$,
$6 \times 9 = 54$ und 4 iſt 58,
$6 \times 8 = 48$ und 5 iſt 53,
$6 \times 3 = 18$ und 5 iſt 23.

Wenn

Wenn 3892 } die Factoren;
5

ſo iſt 19460 ihr Product.

Denn 5 × 2 = 10,
5 × 9 = 45 und 1 iſt 46,
5 × 8 = 40 und 4 iſt 44,
5 × 3 = 15 und 4 iſt 19.

Wenn 5400083 } die Factoren;
9

ſo iſt 48600747 ihr Product.

Denn 9 × 3 = 27
9 × 8 = 72 und 2 iſt 74,
9 × 0 = 0 und 7 iſt 7,
9 × 0 = 0,
9 × 0 = 0,
9 × 4 = 36,
9 × 5 = 45 und 3 iſt 48.

58. Aus der Natur des angenommenen Zahlgebäudes iſt bekannt, daß jede Ziffer, von der Rechten zur Linken um eine Stelle vorgerückt, einen 10fachen; um zwo Stellen vorgerückt, einen 100fachen; um 3 Stellen vorgerückt, einen 1000fachen; um 4 Stellen vorgerückt, einen 10000fachen, u. ſ. f. Werth erhält von dem Werthe, den ſie zuvor hatte. So bedeutet in dieſer Zahl (333333) der 3 in der 4ten Stelle, das 10fache von dem was er in der 3ten; das 100fache von dem was er in der 2ten; und das 1000fache von dem was er in der 1ten bedeutet, und ebenſo gilt der 3 in der 6ten Stelle 10mal ſoviel als in der 5ten; 100mal ſoviel als in der 4ten; 1000mal ſoviel als in der 3ten; 10000mal ſoviel als in der 2ten; und 100000mal ſoviel als in der 1ten Stelle. Wenn alſo was immer für eine Zahl 10, 100, 1000, 10000, oder 100000mal zu nehmen iſt; ſo kömmt es nur darauf an, daß wir jede Ziffer dieſer Zahl um eine,

zwo, drey, vier, oder fünf Stellen von der Rechten zur Linken vorrücken, alſo daß wir derſelben eine, zwo, drey, vier, oder fünf 0 nachſchreiben.

Daher iſt
$$354 \times 10 = 3540,$$
$$354 \times 100 = 35400,$$
$$354 \times 1000 = 354000,$$
$$354 \times 10000 = 3540000,$$
u. ſ. f.

59. Da man immer daſſelbe Product erhält, welchen Factor man mit dem andern multiplicirt; ſo iſt

$$9 \times 20 = 20 \times 9 = 180,$$
$$9 \times 30 = 30 \times 9 = 270,$$
$$9 \times 40 = 40 \times 9 = 360,$$
$$9 \times 50 = 50 \times 9 = 450.$$ u. ſ. f.

Man erhält alſo das 20, 30, 40, oder 50fache einer Zahl wie 9, wenn man ihr 2, 3, 4, oder 5faches 10mal nimmt.

Ferner iſt
$$9 \times 200 = 200 \times 9 = 1800,$$
$$9 \times 300 = 300 \times 9 = 2700,$$
$$9 \times 400 = 400 \times 9 = 3600,$$
$$9 \times 500 = 500 \times 9 = 4500.$$
u. ſ. f.

Man erhält alſo das 200, 300, 400 oder 500fache einer Zahl wie 9, wenn man ihr 2, 3, 4 oder 5faches 100mal nimmt. Ebenſo werden wir das 2000, 3000, 4000 oder 5000fache einer Zahl erhalten, wenn wir ihr 2, 3, 4 oder 5faches 1000mal nehmen; und nicht weniger wird das 20000, 30000, 40000 oder 50000fache einer Zahl gleich ſeyn dem 2, 3, 4 oder 5fachen derſelben 10000mal genommen.

60. Iſt die Zahl 34589 354mal zu nehmen; ſo nehmen wir das 4fache, ſodann das 50fache, und endlich das 300fache derſelben, und addiren dieſe beſondern Vielfachen zuſammen; ſo wird die zum Vorſchein kommende Sum-

Summe das 354fache derſelben ſeyn. Dieſemnach verfahren wir wie folgt:

34589 } 354 }	die Factoren,
138356	das 4fache,
1729450	das 50fache,
10376700	das 300fache,
12244506	das 354fache.

Weil das 50fache ſoviel iſt als das 5fache 10mal genommen; ſo ſetzen wir eine 0 und ſchreiben ſodann das 5fache vor dieſelbe: und weil wieder das 300fache ſoviel iſt als das 3fache 100mal genommen; ſo ſchreiben wir zwo 0 und ſetzen wieder das 3fache vor dieſelben.

Es ſeyen	56030025 } 40067 }	die Factoren;
ſo iſt	392210175	das 7fache,
	3361801500	das 60fache,
	2241201000000	das 40000fache,
	2244955011675	das 40067fache.

Wir haben hier das 60fache zu erhalten erſtlich eine 0 geſetzet, und dieſer noch das 6fache vorgeſchrieben, und das 40000fache zu bekommen, erſtlich vier 0 geſchrieben, und ſodann vor dieſe noch das 4fache geſetzet.

61. Weil die rückwärts ſtehenden 0 in den beſondern Vielfachen (wie in dem 50fachen und 300fachen des vorletzten, und in dem 60fachen und 40000fachen des letzten Beyſpieles) die Summe derſelben weder größer noch kleiner machen; ſo können ſolche Kürze halber gar weggelaſſen werden. Nur iſt wohl zu beobachten, daß man das Vielfache der zwoten Ziffer in der 2ten; jenes der dritten Ziffer in der 3ten; jenes der vierten Ziffer in der 4ten; jenes der fünften Ziffer in der 5ten Stelle; u. ſ. f. zu

ſchreiben anfange. Dieſemnach kommen die vorigen zwey Beyſpiele, wie folgt, zu ſtehen:

(34589 } die Factoren
354 }

138356
172945
103767

12244506 ihr Product.)

(560300025 } die Factoren
40067 }

392210175
336180150
224120100

22449550011675 ihr Product.)

Es ſeyen 405062 } die Factoren;
34216 }

2430372
405062
810124
1620248
1215186

ſo iſt 13859601392 ihr Product.

62. Es iſt ferner nach Nro. 59.

$30 \times 20 = 60 \times 10 = 600$,
$400 \times 20 = 800 \times 10 = 8000$,
$400 \times 300 = 1200 \times 100 = 120000$,
$5000 \times 300 = 15000 \times 100 = 1500000$,
$23000 \times 500 = 115000 \times 100 = 11500000$.

Wenn alſo beeden Factoren rückwärts einige o angehängt ſind; ſo kann man das Product dieſer Factoren, ohne dieſe o betrachtet, nehmen, und ſodann denſelben ſo-

viel

viel o nachſchreiben, als ſich deren in beeden Factoren befinden.

Dieſemnach kommen obige Beyſpiele ganz kurz, wie folgt, zu ſtehen:

$$
\begin{aligned}
30 \times 20 &= 600, \\
400 \times 20 &= 8000, \\
400 \times 300 &= 120000, \\
5000 \times 300 &= 1500000, \\
23000 \times 500 &= 11500000.
\end{aligned}
$$

Denn 2 × 3 iſt 6, und zwo o nachgeſetzt, giebt 600,
2 × 4 iſt 8, und drey o nachgeſetzt, giebt 8000,
3 × 4 iſt 12, und vier o nachgeſetzt, giebt 120000,
3 × 5 iſt 15, und fünf o nachgeſetzt, giebt 1500000,
5 × 23 iſt 115, und fünf o nachgeſetzt, giebt 11500000.

Ebendaher können auch die mehr zuſammengeſetzten Factoren bequem ſo geſchrieben werden, als wenn die rückwärts angehängten o nicht wären. Wie aus folgenden Beyſpielen zu erſehen.

Es ſeyen 30456000 } 30200 } die Factoren;

60912
91368

ſo iſt 919771200000 ihr Product.

Es ſeyen 500800 } 20030000 } die Factoren;

15024
10016

ſo iſt 10031024000000 ihr Product.

```
Es ſeyen   3423500000 } die Factoren;
           123400     }
           ----------------
           136940
          102705
          68470
         34235
         ----------------
ſo iſt   422459900000000 ihr Product
```

63. Wenn was immer für zween Factoren wie 3212 und 4 gegeben ſind; ſo ſind wir allemal im Stande auch ihr Product 12848 zu finden. Allein es könnte ſich ereignen, daß uns dieſes Product 12848 nebſt einem aus ſeinen Factoren Z. B. 3212 bekannt wäre, und daß wir den andern Factor 4 zu ſuchen hätten.

Es ſeyen wieder 5 Punkten 3mal, und 7 Puncten 4mal untereinander geſchrieben, wie folgt:

ſo ſtellen die 15 Puncten das Product aus 3 und 5, und die 28 Puncten jenes aus 4 und 7 vor.

Nun iſt in dem Producte 15 augenſcheinlich der Factor 5 3mal, und der Factor 3 5mal enthalten; oder der Factor 5 iſt der 3te, und der Factor 3 der 5te Theil deſſelben. Ebenſo iſt wieder in dem Producte 28 der Factor 7 4mal, und der Factor 4 7mal enthalten, oder 7 iſt der 4te, und 4 der 7te Theil deſſelben.

Und wenn 3212 Puncten 4mal untereinander geſetzet ſind; ſo werden 12848 Puncten das Produkt aus 3212 und 4 vorſtellen. Folglich wird wieder, wie in vorigen Beyſpielen, in dem Producte 12848 der Factor 3212 4mal, und der Factor 4 3212mal enthalten, oder 3212 der 4te, und 4 der 3212te Theil deſſelben ſeyn.

Es

Es iſt alſo allemal ein Factor ſo oft in dem Producte enthalten, oder der ſovielte Theil deſſelben, als der andere Factor anzeigt.

Wenn daher das Product und ein Factor bekannt ſind, der andere Factor aber zu ſuchen iſt; ſo kömmt es blos darauf an, daß man jene Zahl finde, welche ſo oft in dem Producte enthalten, oder der ſovielte Theil deſſelben iſt, als der gegebene Factor anzeigt: oder auch, daß man durch eine Zahl beſtimme, wie oft der gegebene Factor in dem gegebenen Producte enthalten, oder der wievielte Theil der gegebene Factor von dem gegebenen Producte ſey. Dieſes wird man unfehlbar erfahren, wenn man den gegebenen Factor von dem gegebenen Producte ſo oft abzieht, bis er daſſelbe ganz erſchöpfet.

Es iſt daher, für das vorgelegte Beyſpiel,

1tens	12848	die gegebene Summe
	3212	die gegebene Zahl
	9636	ihr Unterſcheid,
2tens	9636	die gegebene Summe
	3212	die gegebene Zahl
	6424	ihr Unterſcheid,
3tens	6424	die gegebene Summe
	3212	die gegebene Zahl
	3212	ihr Unterſcheid,
4tens	3212	die gegebene Summe
	3212	die gegebene Zahl
	0	ihr Unterſcheid.

Da nun der gegebene Factor 3212, 4mal von dem gegebenen Producte 12848 abgezogen, daſſelbe ganz erſchöpfet; ſo iſt er gerade 4mal darinn enthalten, oder der

4te Theil davon; folglich iſt 4 der verlangte Factor, welcher ebenfalls 3212mal in dem Producte 12848 enthalten, oder der 3212te Theil deſſelben iſt.

Dieſe Methode wäre ſonder Zweifel für Fälle, da der gegebene Factor in dem gegebenen Producte ſehr oft enthalten iſt, zu weitläuftig; daher wollen wir ſehen, wie ſolche ſich abkürzen laſſe.

Vom Dividiren oder Theilen.

64.

Es heißt, aus dem gegebenen Producte zweener Factoren, und einem aus dieſen Factoren, den andern finden.

Es ſey 12 durch 4 zu theilen, heißt ſoviel, als es ſey 12 ein Product aus zweenen Factoren, und 4 ſey einer von dieſen zweenen Factoren; man ſoll den andern finden. Es iſt alſo die Frage, wie oft 4 in 12 enthalten, oder der wievielte Theil die Zahl 4 von der Zahl 12 ſey? Oder, welches einerley iſt, welche Zahl in 12 4mal enthalten, oder der 4te Theil von 12 ſey? Dieſe Zahl iſt offenbar 3; denn 4 × 3 iſt 12.

Das gegebene Product 12 heißt Dividirend, der gegebene Factor 4 Diviſor oder Theiler, und der geſuchte Factor 3 Quotient.

Will man anzeigen, daß eine Zahl 12 durch eine andere 4 zu theilen ſey; ſo ſchreibt man erſtlich das Dividend 12 ſodann den Theiler 4, ſondert ſie durch zween Puncten (:) voneinander ab, und lieſt dergleichen Ausdrücke (12 : 4 = 3) ſo: 12 dividirt durch 4 iſt gleich 3, oder 4 iſt in 12 3mal enthalten.

65. So lang das Dividend ein Product aus zweenen einzelnen Factoren iſt; ſo kann man gar leicht, wenn einer davon bekannt iſt, aus obiger Tafel Nro 55 auch den andern finden.

So ſieht man bald ein, daß

$12 : 4 = 3$,	$63 : 9 = 7$,
$27 : 9 = 3$,	$49 : 7 = 7$,
$45 : 9 = 5$,	$56 : 8 = 7$. u. ſ. f.

66. Weil jede Zahl als ein Product aus 1 und der Zahl ſelbſt kann angeſehen werden; ſo iſt auch jede Zahl, durch ſich ſelbſt dividirt, wieder gleich 1. So iſt.

$4 : 4 = 1$,	$100 : 100 = 1$,
$8 : 8 = 1$,	$34 : 34 = 1$.

67. Iſt ein Factor $= 0$; ſo iſt auch das Product $= 0$. Daher giebt 0 durch jede Zahl dividirt wieder 0 für den Quotienten. So iſt

$0 : 4 = 0$,	$0 : 100 = 0$,
$0 : 8 = 0$,	$0 : 1000 = 0$. u. ſ. f.

68. Iſt 3 durch 4 zu theilen; ſo iſt 1 für den Quotienten zu groß; denn $4 \times 1 = 4$; und 0 iſt zu klein; denn $4 \times 0 = 0$. Dieſer Quotient, der 4mal genommen 3 ausmachen ſoll, iſt alſo größer als 0 und kleiner als 1. Wir haben aber noch keine Ziffern, womit wir die Zahlen, welche zwiſchen 0 und 1 liegen, ausdrücken können. Es iſt daher vonnöthen, daß wir dergleichen Quotienten anzudeuten wieder ganz andere Ziffern ausfindig machen, oder aber eine Art beſtimmen, nach welcher ſolche durch die Ziffern, die wir ſchon angenommen haben, können ausgedrücket werden.

Man hat ſich entſchloſſen ſolche dadurch anzuzeigen, daß man den Theiler unter das Dividend ſchreibt, und ſie mit einem Striche voneinander abſondert, wie ($\frac{3}{4}$).

Es bedeutet alſo $\frac{3}{4}$ nichts anders als der Quotient, den man erhält, wenn man 3 durch 4 theilet, folglich jene Zahl, welche 4mal genommen 3 ausmacht.

Ebenſo iſt $5 : 6 = \frac{5}{6}$,	$9 : 11 = \frac{9}{11}$,
$7 : 10 = \frac{7}{10}$,	$9 : 13 = \frac{9}{13}$. u. ſ. f.

und

und daher wieder $\frac{5}{6} \times 6 = 5$,
$\frac{7}{10} \times 10 = 7$,
$\frac{9}{11} \times 11 = 9$,
$\frac{9}{13} \times 13 = 9$. u. ſ. f.

Dergleichen Quotienten werden **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genennet und wie folgt ausgeſprochen:

$\frac{3}{4}$ drey Viertel, oder 3 dividirt durch 4,
$\frac{5}{6}$ fünf Sechſtel, oder 5 dividirt durch 6,
$\frac{7}{10}$ ſieben Zehntel, oder 7 dividirt durch 10,
$\frac{9}{11}$ neun Eilftel, oder 9 dividirt durch 11,
$\frac{11}{19}$ eilf Neunzehntel, oder 11 dividirt durch 19.

69. Iſt 8 durch 3 zu theilen; ſo iſt der Quotient abermal größer als 2 und kleiner als 3. Denn $3 \times 2 = 6$, und $3 \times 3 = 9$. Daher ſagt man: 3 iſt in 8 2mal enthalten und bleiben 2 übrig, oder 3 iſt in 8 (2 und $\frac{2}{3}$) mal enthalten. Oder

$8 : 3 = 2\frac{2}{3}$,	$3 : 2 = 1\frac{1}{2}$,
$9 : 4 = 2\frac{1}{4}$,	$29 : 6 = 4\frac{5}{6}$,
$11 : 4 = 2\frac{3}{4}$,	$38 : 7 = 5\frac{3}{7}$,

u. ſ. f.

Denn $\frac{2}{3} \times 3 = 2$, und $2 \times 3 = 6$; alſo $2\frac{2}{3} \times 3 = 8$.

Und ebenſo iſt $2\frac{1}{4} \times 4 = 9$,
$2\frac{3}{4} \times 4 = 11$,
$1\frac{1}{2} \times 2 = 3$,
$4\frac{5}{6} \times 6 = 29$,
$5\frac{3}{7} \times 7 = 38$.

70. Es iſt ferner

$8000 : 2 = 4000$.	Denn $4000 \times 2 = 8000$,
$600 : 2 = 300$.	Denn $300 \times 2 = 600$,
$40 : 2 = 20$.	Denn $20 \times 2 = 40$,
$8 : 2 = 4$.	Denn $4 \times 2 = 8$,

Wenn

Wenn alſo einige Tauſende, Hunderte, Zehner oder Einheiten zu theilen ſind; ſo erhalten wir für den Quotienten wieder Tauſende, Hunderte, Zehner oder Einheiten.

Daher iſt 8648 : 2 = 4324

Denn weil 2 in 8000 4000mal,
in 600 300mal,
in 40 20mal,

und in 8 4mal enthalten iſt; ſo iſt auch 2 in 8648 4324mal enthalten; alſo 4324 der verlangte Quotient.

Wenn folglich das Dividend aus Einheiten, Zehnern, Hunderten u. ſ. f. zuſammengeſetzet, der Theiler aber eine einzelne Zahl iſt; ſo erhält man den Quotienten, wenn man zu erſt den einzelnen Quotienten der höchſten Ziffer, ſodann jenen der nächſtniedrigern, ferner jenen der folgenden u. ſ. f. nacheinander niederſchreibt. Man drückt ſich dabey Kürze halber nur ſo aus:

8 : 2 giebt 4,	4 : 2 giebt 2,
6 : 2 giebt 3,	8 : 2 giebt 4.

Ebenſo iſt 864 : 2 = 432,
2644 : 2 = 1322,
9369 : 3 = 3123,
4884 : 4 = 1221. u. ſ. f.

71. Wenn einige Stellen des Dividends mit 0 beſetzet ſind; ſo iſt in dieſen Stellen nichts zu theilen: folglich ſind die gleichnamigen Stellen des Quotienten wieder mit 0 zu bezeichnen.

Daher iſt 80004 : 4 = 20001

Man drückt ſich dabey ſo aus: 8 : 4 giebt 2,
0 : 3 giebt 0,
0 : 4 giebt 0,
0 : 4 giebt 0, und
4 : 4 giebt 1.

Eben

Ebenſo iſt 906030 : 3 = 302010, und
400006 : 2 = 200003.

72. Iſt 9856 durch 2 zu theilen; ſo iſt
9856 : 2 = 4928.

Denn weil wir den Quotienten (9 : 2) durch keine ganze Zahl ausdrücken können; ſo dividiren wir nur 8, und ſetzen anſtatt 1, welches noch nicht getheilt iſt, in der nächſtniedrigern Stelle 10 Einheiten mehr, als ſchon darinn ſind, ſo daß in der folgenden Stelle anſtatt 8, itzt 18 zu theilen kommen: und weil 5 durch 2 nicht theilbar iſt; ſo theilen wir nur 4 und in der folgenden Stelle anſtatt 6 wieder 16;

und ſagen: 9 : 2 giebt 4, und 1 zum Reſte,
18 : 2 giebt 9,
5 : 2 giebt 2, und 1 zum Reſte,
und 16 : 2 giebt 8.

Ebenſo iſt 894351 : 3 = 298117.

Denn 8 : 3 giebt 2, und 2 zum Reſte,
29 : 3 giebt 9, und 2 zum Reſte,
24 : 3 giebt 8,
3 : 3 giebt 1,
5 : 3 giebt 1, und 2 zum Reſte,
und 21 : 3 giebt 7.

Ferner iſt 742835 : 5 = 148567.

Denn 7 : 5 giebt 1, und 2 zum Reſte,
24 : 5 giebt 4, und 4 zum Reſte,
42 : 5 giebt 8, und 2 zum Reſte,
28 : 5 giebt 5, und 3 zum Reſte,
33 : 5 giebt 6, und 3 zum Reſte,
und 35 : 5 giebt 7 ohne Reſt.

So oft alſo in einer Stelle des Dividends ein Reſt bleibt; ſo iſt deſſen 10faches zu der nächſtniedrigeren Stelle zu zählen. Und iſt in einer Stelle die zu theilende Zahl
klei-

kleiner als der Theiler; ſo iſt die gleichnamige Stelle des Quotienten mit einer 0 zu bezeichnen, und das 10fache dieſer Zahl wieder zu der nächſtniedrigern Stelle zu zählen.

So iſt 8401218 : 6 = 1400203

Denn 8 : 6 giebt 1, und 2 zum Reſte,
24 : 6 giebt 4,
0 : 6 giebt 0,
1 : 6 giebt 0, und 1 zum Reſte,
12 : 6 giebt 2,
1 : 6 giebt 0, und 1 zum Reſte,
und 18 : 6 giebt 3, ohne Reſt.

Ebenſo iſt 97314 : 7 = 13902.
87232 : 8 = 10904.

Wenn die höchſte Ziffer des Dividends kleiner iſt als der Theiler; ſo hat man nicht vonnöthen in dem Quotienten eine 0 zu ſeßen, weil ſolche, vor den Ziffern geſeßt, ihre Stelle und folglich auch ihren Werth nicht ändert. Daher zählt man in ſolchem Falle das 10fache der höchſten Ziffer ſogleich zu der nächſtniedrigern Stelle, wie im folgenden Beyſpiele;

3489561 : 9 = 387729.

und ſagt: 34 : 9 giebt 3, und 7 zum Reſte,
78 : 9 giebt 8, und 6 zum Reſte,
69 : 9 giebt 7, und 6 zum Reſte,
65 : 9 giebt 7, und 2 zum Reſte,
26 : 9 giebt 2, und 8 zum Reſte,
und 81 : 9 giebt 9 ohne Reſt.

Ebenſo iſt 123564 : 7 = 17652;
845672 : 9 = $93963\frac{5}{9}$;
567480 : 6 = 94580;
1504517 : 5 = $300903\frac{2}{5}$;
4800727 : 8 = $600090\frac{7}{8}$.

Digitized by Google

73. Es ſey 149 durch 42 zu theilen.

Weil 42 in 1 nicht, und in 14 auch nicht, ſondern erſt in 149 enthalten iſt; ſo wird der Quotient weder aus einigen Hunderten, noch aus einigen Zehnern, ſondern nur aus Einheiten beſtehen.

Es iſt alſo hier nur die Frage, wie oft 42 in 149 enthalten ſey; Dieſes werden wir beynahe erfahren, wenn wir die niedrigſten Ziffern des Theilers und des Dividends vernachläßigen und fragen, wie oft 40 in 140, oder 4 Zehner in 14 Zehnern, oder 4 in 14 enthalten ſey? Es iſt aber leicht einzuſehen, daß 4 in 14; alſo auch 4 Zehner in 14 Zehnern; oder 40 in 140 3mal enthalten iſt. Setzen wir daher 3 für den Quotienten, und ziehen den Theiler 42 3mal genommen = 126 von dem Dividende 149 ab; ſo finden wir 23 zum Reſte, der noch durch 42 dividirt, $\frac{23}{42}$ für den Quotienten giebt.

Dieſes Verfahren wollen wir, wie folgt, andeuten:

$$\begin{array}{l} 149 : 42 = 3\tfrac{23}{42} \\ \underline{126} \\ \ \ 23 \end{array}$$

und dabey uns ſo ausdrücken: 4 in 14 iſt 3mal enthalten; 3mal 2 iſt 6; 3mal 4 iſt 12; 6 von 9 bleibt 3, 2 von 4 bleibt 2, und 1 von 1 bleibt nichts. Daher iſt der geſuchte Quotient $3\frac{23}{42}$.

Da nun 149 Einheiten, durch 42 getheilt, 3 Einheiten für den Quotienten und 23 Einheiten zum Reſte geben; ſo werden auch 149 Zehner, durch 42 getheilt, 3 Zehner für den Quotienten und 23 Zehner zum Reſte; 149 Hunderte, durch 42 getheilt, 3 Hunderte für den Quotienten und 23 Hunderte zum Reſte; und 149 Tauſende, durch 42 getheilt, 3 Tauſende für den Quotienten, und 23 Tauſende zum Reſte geben.

Denn die 149 mögen Einheiten, Zehner, Hunderte, oder Tauſende bedeuten; ſo muß der Quotient $3\frac{23}{42}$, je-

desmal der 42ſte Theil davon ſeyn, alſo wieder Einheiten, Zehner, Hunderte oder Tauſende anzeigen.

Ebenſo finden wir

$$\begin{array}{l} 235 : 42 = 5\frac{25}{42} \\ \underline{210} \\ \;\;25 \end{array}$$

Denn 4 in 23 iſt 5mal enthalten; und 5 × 42 = 210, von 235 abgezogen, läßt 25 zum Reſte.

Und
$$\begin{array}{l} 252 : 42 = 6 \\ \underline{252} \\ \;\;0 \end{array}$$

Denn 4 in 25 iſt 6mal enthalten; und 6 × 42 = 252, von 252 abgezogen, läßt nichts zum Reſte.

Es ſey 14952 durch 42 zu theilen;

ſo iſt
$$\begin{array}{l} 14952 : 42 = 356 \\ \underline{126} \\ \;\;235 \\ \;\;\underline{210} \\ \;\;\;252 \\ \;\;\;\underline{252} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Denn weil 42 weder in 1 noch in 14, ſondern erſt in 149 enthalten iſt; ſo wird der Quotient weder einige Zehntauſende, noch einige Tauſende, ſondern nur Hunderte, Zehner und Einheiten enthalten; wir theilen daher: 1ſtens die 149 Hunderte; ſo erhalten wir 3 Hunderte für den Quotienten, und 23 Hunderte zum Reſte: dieſe 23 Hunderte geben 230 Zehner, die mit den 5 Zehnern des Dividends 235 Zehner ausmachen: wir ſetzen daher jene 5 Zehner des Dividends nach dem Reſte der Hunderte 23, und theilen 2tens die 235 Zehner;

ſo erhalten wir 5 Zehner für den Quotienten, und 25 Zehner, oder 250 Einheiten zum Reſte, die mit den 2 Einheiten des Dividends 252 Einheiten ausmachen: wir ſetzen daher wieder jene 2 Einheiten des Dividends nach dem Reſte der Zehner 25, und theilen 3tens die 252 Einheiten; ſo erhalten wir noch 6 Einheiten für den Quotienten ohne Reſt.

Auf ſolche Art haben wir von dem Dividende 14952 abgezogen

1tens	42 × 3 Hunderte	= 126 Hunderte	= 12600
2tens	42 × 5 Zehner	= 210 Zehner	= 2100
3tens	42 × 6 Einheiten	= 252 Einheiten	= 252
	alſo überhaupt 42 × 356. . . .		= 14952

Da nun dieſes das gegebene Product gerade erſchöpfet; ſo iſt 42 in 14952 auch 356mal enthalten, alſo 356 der verlangte Quotient.

74. Iſt 7108 durch 832 zu theilen; ſo iſt die Frage, wie oft 832 in 7108 enthalten ſey.

Dieſes beynahe zu erfahren, vernachläßigen wir die niedrigern Ziffern des Theilers und ihre gleichnamigen des Dividends und ſehen nur, wie oft 800 in 7100, oder 8 Hunderte in 71 Hunderten, oder 8 in 71 enthalten ſey.

Daher finden wir $7108 : 832 = 8\frac{452}{832}$

$$\begin{array}{r} 6656 \\ \hline 452 \end{array}$$

Denn 8 in 71 iſt 8mal enthalten, und 8 × 832 = 6656, von 7108 abgezogen, läßt 452 zum Reſte.

Ebenſo iſt $4526 : 832 = 5\frac{366}{832}$

$$\begin{array}{r} 4160 \\ \hline 366 \end{array}$$

Denn 8 in 45 iſt 5mal enthalten, und 5 × 832 = 4160, von 4526 abgezogen, läßt 366 zum Reſte.

Und

Und $3660 : 832 = 4\frac{332}{832}$

$$\begin{array}{r} 3660 \\ \underline{3328} \\ 332 \end{array}$$

Denn 8 in 36 iſt 4mal enthalten, und 4 × 832 = 3328, von 3660 abgezogen, giebt 332 zum Reſte.

Endlich iſt $3328 : 832 = 4$

$$\begin{array}{r} 3328 \\ \underline{3328} \\ 0 \end{array}$$

Denn 8 in 33 iſt 4mal enthalten, und 4 × 832 = 3328, von 3328 abgezogen, läßt nichts zum Reſte.

Daher iſt $7108608 : 832 = 8544$

	6656
Hunderte	4526
	4160
Zehner	3660
	3328
Einheiten	3328
	3328
	0

Denn **1tens** geben 7108 Tauſende, durch 832 getheilt, 8 Tauſende für den Quotienten, und 452 Tauſende oder 4520 Hunderte zum Reſte;

2tens geben 4526 Hunderte, durch 832 getheilt, 5 Hunderte für den Quotienten, und 366 Hunderte oder 3660 Zehner zum Reſte;

3tens geben 3660 Zehner, durch 832 getheilet, 4 Zehner für den Quotienten, und 332 Zehner oder 3320 Einheiten zum Reſte; und

4tens geben 3328 Einheiten, durch 832 getheilt, 4 Einheiten für den Quotienten ohne Reſt.

Auf ſolche Art iſt von dem Dividende 7108608 abgezogen worden:

1tens	832	×	8000	=	6656000
2tens	832	×	500	=	416000
3tens	832	×	40	=	33280
4tens	832	×	4	=	3328 alſo
überhaupt	832	×	8544	=	7108608

welches das Dividend erſchöpfet. Folglich iſt 8544 der verlangte Quotient.

75. Wenn man alſo von was immer für einem gegebenen Dividende ſoviel von den höchſten Ziffern deſſelben nimmt als vonnöthen ſind um den Theiler zu enthalten; ſo hat man das erſte beſondere Dividend, welches durch den Theiler dividirt, für den Quotienten die höchſte Ziffer giebt, die allemal mit der niedrigſten des beſondern Dividends gleichnamig iſt.

Setzet man ſodann nach dem Reſte die nächſtniedrigere Ziffer des Dividends herunter; ſo erhält man das zweyte beſondere Dividend, welches getheilt für den Quotienten wieder eine Ziffer giebt, die abermal mit der niedrigſten Ziffer dieſes beſondern Dividends gleichnamig iſt, folglich in die nächſtniedrigere Stelle der zuvor gefundenen gehört. Und ſo können alle Ziffern des Quotienten von der höchſten bis zur niedrigſten nacheinander ohne große Mühe gefunden werden; wenn man anfänglich nur auf die höchſte Ziffer des Theilers ſieht.

So

So iſt noch

$$\begin{array}{ll} & 2879793546 : 8029 = 358674 \\ & 24087 \\ \text{2tes Dividend} & 47109 \\ & 40145 \\ \text{3tes Dividend} & 69643 \\ & 64232 \\ \text{4tes Dividend} & 54115 \\ & 48174 \\ \text{5tes Dividend} & 59414 \\ & 56203 \\ \text{6tes Dividend} & 32116 \\ & 32116 \\ & 0 \end{array}$$

76. Iſt eines aus dieſen beſondern Dividenden kleiner als der Theiler; ſo iſt dieſer auch nicht darinn enthalten, alſo die gleichnamige Stelle des Quotienten mit einer 0 zu bezeichnen, die folgende Ziffer des Dividends herunter zu ſetzen, und wie ſonſt fort zu fahren.

So findet man

$$\begin{array}{l} 170594208 : 8402 = 20304 \\ 16804 \\ 25542 \\ 25206 \\ 33608 \\ 33608 \\ 0 \end{array}$$

und 1203982280424 : 40106 = 30020004
120318

80228
80212

160424
160424

0.

77. Sieht man, wie in vorigen Beyſpielen, anfänglich nur auf die höchſte Ziffer des Theilers; ſo findet man oft, beſonders wenn die höchſte Ziffer des Theilers kleiner iſt als die nächſtfolgende, für den Quotienten eine Ziffer, die zu groß iſt: und will man rathen; ſo kann es leicht geſchehen, daß man ſolche zu klein annimmt. Den erſten Fehler erkennet man, wenn der Theiler ſo oft genommen, als dieſe Ziffer anzeigt, ein Product giebt, welches größer iſt als das beſondere Dividend; und den zweyten, wenn dieſes Product, von dem beſondern Dividende abgezogen, einen Reſt giebt, der nicht kleiner iſt als der Theiler. Iſt z. B. 1548 durch 283 zu theilen; ſo iſt für den Quotienten

1tens 7 zu groß; den 7 × 283 = 1981 iſt größer als 1548:

2tens 6 zu groß; denn 6 × 283 = 1698 iſt größer als 1548:

3tens 4 zu klein; den 4 × 283 = 1132, von 1548 abgezogen, giebt einen Reſt 416, der nicht kleiner iſt als der Theiler 283:

4tens 5 eben recht; denn 5 × 283 = 1415 von 1548 abgezogen, läßt 133 zum Reſte, der kleiner iſt als der Theiler 283. Stellet man dieſe Verſuche nur mit den zwo höchſten Ziffern an; ſo kann man ziemlich verläſſig die wahre Ziffer für den Quotienten ohne große Mühe finden. So ſieht man bald, daß im gegenwärtigen Beyſpiele

1tens

1tens 7 zu groß; denn, weil 7 × 8 = 56, ſo wird 5 + 14 = 19 größer als 15:

2tens 6 zu groß; denn, weil 6 × 8 = 48, ſo wird 4 + 12 = 16 größer als 15:

3tens 5 eben recht; denn, weil 5 × 8 = 40, ſo wird 4 + 10 = 14 kleiner als 15.

Iſt 1330 durch 283 zu theilen; ſo iſt

1tens 5 zu groß; denn, weil 5 × 8 = 40, ſo wird 4 + 10 = 14 größer als 13:

2tens 4 eben recht; denn, weil 4 × 8 = 32, ſo wird 3 + 8 = 11 kleiner als 13.

Iſt 1981 durch 283 zu theilen; ſo iſt

1tens 9 zu groß; denn, weil 9 × 8 = 72, ſo wird 7 + 18 = 25 größer als 19:

2tens 8 zu groß; denn, weil 8 × 8 = 64, ſo wird 6 + 16 = 22 größer als 19:

3tens 7 eben recht; denn, weil 7 × 8 = 56, ſo wird 5 + 14 = 19. Hat man einmal in Gedanken den Quotienten nach den zwo höchſten Ziffern beſtimmt; ſo kann man dieſe Ziffer des Quotienten zwar hinſchreiben; aber doch allemal wieder ändern, wenn ſolche mit dem Theiler multiplicirt ein Product giebt, das größer iſt als das beſondere Dividend, oder das von dieſem Dividende abgezogen einen Reſt läßt, der nicht kleiner iſt als der Theiler. Wer dieſes beobachtet, kann wieder ohne große Mühe finden:

daß 154801 : 283 = 547
1415
―――
1330
1132
―――
1981
1981
―――
0

58652284 : 1942 = 30202
5826
3922
3884
3884
3884
0

12582388 : 364 = 34567
1092
1662
1456
2063
1820
2438
2184
2548
2548
0

5092164 : 2541 = 2004
5082
10164
10164
0

und 89345 : 692 = 129 $\frac{77}{692}$
692
2014
1384
6305
6228
77

78. Weil die Werthe der Ziffern von der Rechten zur Linken um das 10fache wachſen; ſo bedeutet jede Ziffer, von der Linken zur Rechten um eine Stelle zurück geſetzt, nur den 10ten; um zwo Stellen zurück geſetzt, nur den 100ten; um drey Stellen zurück geſetzt, nur den 1000ten Theil von ihrem vorigen Werthe.

Es gilt z. B. in dieſer Zahl (333333) der 3 in der 3ten Stelle nur den 10ten Theil von dem was er in der 4ten, nur den 100ten Theil von dem was er in der 5ten, und nur den 1000ten Theil von dem was er in der 6ten Stelle gilt.

Wenn alſo was immer für eine Zahl durch 10, 100, 1000 u. ſ. f. zu theilen iſt; ſo kömmt es nur darauf an, daß man jede Ziffer dieſer Zahl um eine, zwo, drey u. ſ. f. Stellen von der Linken zur Rechten zurück ſetze; folglich in dem Dividende ſoviel von den niedrigſten Stellen weglaſſe, als der Theiler Nullen enthält, und die Ziffern, welche dieſe weggelaſſenen Stellen beſetzen, als den Reſt anſehe.

Daher iſt

$$3450 : 10 = 345$$
$$34500 : 100 = 345$$
$$345000 : 1000 = 345$$
$$3450000 : 10000 = 345$$
$$345 : 10 = 34\tfrac{5}{10}$$
$$8256 : 100 = 82\tfrac{56}{100}$$
$$34567 : 1000 = 34\tfrac{567}{10000}$$
$$34567 : 10000 = 3\tfrac{4567}{100000}$$ u. ſ. f.

79. Wenn man den 10ten Theil einer Zahl, durch 2, 3, 4, 5 oder 6 theilet; ſo erhält man den 20, 30, 40, 50, oder 60ten Theil derſelben.

Daher iſt

$$120 : 20 = 12 : 2 = 6$$
$$120 : 30 = 12 : 3 = 4$$
$$120 : 40 = 12 : 4 = 3$$
$$120 : 50 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$120 : 60 = 12 : 6 = 2$$
$$120 : 70 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Theilt man den 100ten Theil einer Zahl, durch 2, 3, 4, 5, oder 6; ſo erhält man den 200, 300, 400, 500, oder 600ten Theil derſelben.

Daher iſt
$$1200 : 200 = 12 : 2 = 6$$
$$1200 : 300 = 12 : 3 = 4$$
$$1200 : 400 = 12 : 4 = 3$$
$$1200 : 500 = 12 : 5 = 2\tfrac{2}{5}$$
$$1200 : 600 = 12 : 6 = 2$$
$$1200 : 700 = 12 : 7 = 1\tfrac{5}{7}$$

Ebenſo erhält man den 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, oder 6000ten Theil einer Zahl, wenn man den 1000ten Theil derſelben durch 2, 3, 4, 5, oder 6 theilet.

Daher iſt
$$24000 : 2000 = 24 : 2 = 12$$
$$24000 : 3000 = 24 : 3 = 8$$
$$24000 : 4000 = 24 : 4 = 6$$
$$24000 : 5000 = 24 : 5 = 4\tfrac{4}{5}$$
$$24000 : 6000 = 24 : 6 = 4$$
$$24000 : 7000 = 24 : 7 = 3\tfrac{3}{7}$$

Wenn alſo in dem Dividende und in dem Theiler die letztern Stellen mit 0 beſetzet ſind; ſo kann man in beeden gleichviel von dieſen Stellen vernachläßigen, und wie ſonſt dividiren. So iſt

```
70452(000 : 342(000 = 206
684
 2052
 2052
   0
```

4670240

```
4670240(00 : 202(00 = 23120
404
 630
 606
  242
  202
   404
   404
    00
8943590(00 : 294(00 = 30420 112/294
882
 1235
 1176
   599
   588
   110
```

80. Sind die letztern Stellen des Dividends nicht mit Nullen beſetzet; ſo ſind doch in demſelben ſo viel Stellen außer Acht zu laſſen, als man in dem Theiler Nullen wegläßt; bey der Beſtimmung des Bruches aber ſowohl dieſe als jene wieder in Betrachtung zu ziehen. So iſt

```
128592(34 : 282(00 = 456 34/28200
1128
 1579
 1410
  1692
  1692
     0
36201(53 : 72(00 = 502 5753/7200
360
 201
 144
  57
```

$$624(593 : 28(000 = 22\tfrac{8593}{28000}$$

```
624(593
56
--
 64
 56
 --
  8
```

81. Aus Vorhergehendem erhellet, daß es beym Dividiren immer nur darauf ankömmt, daß man aus den 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und 9fachen des Theilers jedesmal jenes Vielfache deſſelben beſtimme, welches dem einzelnen Dividende gleich, oder in Anſehung deſſen das nächſtkleinere iſt, und ſodann daſſelbe von dieſem abziehe. Wenn wir daher aus den Vielfachen des Theilers vorläufig eine Tafel verfertigen; ſo haben wir nichts anders zu thun, als abzuziehen. Dieſe Tafel kann blos durch Addiren zu Stande gebracht werden; indem der Theiler zu ſich ſelbſt addirt, das 2fache; zu dieſem addirt, das 3fache; zu dieſem addirt, das 4fache; und zu jedem aus ſeinen Vielfachen addirt, allemal das nächſtgrößere giebt.

Iſt z. B. 1260964305264 durch 169823 zu theilen; ſo iſt die Tafel der Vielfachen des Theilers folgende:

1.		1	6	9	8	2	3	das 1fache
2.		3	3	9	6	4	6	das 2fache
3.		5	0	9	4	6	9	das 3fache
4.		6	7	9	2	9	2	das 4fache
5.		8	4	9	1	1	5	das 5fache
6.	1	0	1	8	9	3	8	das 6fache
7.	1	1	8	8	7	6	1	das 7fache
8.	1	3	5	8	5	8	4	das 8fache
9.	1	5	2	8	4	0	7	das 9fache

Und

Und 1260964305264 : 169823 = 7425168
1188761 das 7fache
722033
679292 das 4fache
427410
339646 das 2fache
877645
849115 das 5fache
285302
169823 das 1fache
1154796
1018938 das 6fache
1358584
1358584 das 8fache
0

Dieſe Methode iſt weit leichter auszuführen, als die vorige, und kürzet die Arbeit noch über dies ſehr ab, ſo oft man mehrere Zahlen durch den nemlichen Theiler zu dividiren hat; indem in ſolchem Falle die Tafel immer dieſelbe bleibt. So dienet die vorige wieder zum folgenden Beyſpiele:

5110318810690 : 169823 = 30092030
509469 das 3fache
1562881
1528407 das 9fache
344740
339646 das 2fache
509469
509469 das 3fache
0 0

Vom Multipliciren mit Buchſtaben

oder algebraiſchen Zahlen.

82.

Man hat willkührlich angenommen, daß Buchſtaben unmittelbar nacheinander geſchrieben, ihr Product bedeuten ſollen.

Es bedeutet alſo ab weder a noch b, ſondern jene Zahl, welche man erhält, wenn man a mit b multiplicirt.

Ebenſo iſt abd das Product aus jeden drey Zahlen a, b und d, und abde jenes aus jeden vier Zahlen a, b, d und e.

Es ſey $a = 2$, $b = 3$, $d = 4$ und $e = 5$;

ſo iſt $ab = 2 \times 3 = 6$

$abd = 2 \times 3 \times 4 = 24$

und $abde = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Und iſt $a = 6$, $b = 10$, $d = 40$, $e = 100$;

ſo iſt $ab = 6 \times 10 = 60$

$abd = 6 \times 10 \times 40 = 2400$

und $abde = 6 \times 10 \times 40 \times 100 = 240000$.

83. Es iſt immer daſſelbe, welchen Buchſtaben man in dem Producte vor den andern ſchreibe; weil ſolche bey geänderter Stelle ihren Werth nicht ändern, und darum nicht ändern, weil man nicht angenommen hat, daß ſie ihn ändern ſollen. Doch hat man gewöhnt den erſtern Buchſtaben des Alphabets den Rang zu geben, und obgleich ba und dba eben das was ab und abd bedeuten; ſo bedienet man ſich doch lieber dieſer letztern Ausdrücke.

84.

84. Iſt a, 1, 2, 3, oder 4mal zu nehmen;

ſo iſt $a \times 1 = a$ | $a \times 3 = 3a$
$a \times 2 = 2a$ | $a \times 4 = 4a$ u. ſ. f.

Es bedeutet alſo 4 a das Product aus 4 und a,
3 a jenes aus 3 und a,
2 a jenes aus 2 und a,
und a jenes aus 1 und a.

Ebenſo iſt
$$3a \times 4 = 4 \times 3 \times a = 12a,$$
$$5a \times 2 = 2 \times 5 \times a = 10a,$$
$$5a \times 7 = 7 \times 5 \times a = 35a,$$
$$6a \times b = 6 \times a \times b = 6ab,$$
$$6a \times 2b = 6 \times 2 \times a \times b = 12ab,$$
$$7a \times 3b = 7 \times 3 \times a \times b = 21ab.$$

Die Ziffern, welche vor den Buchſtaben ſtehen, heißen **Coefficienten.**

Wenn alſo die Factoren Coefficienten haben; ſo erhält man ihr Product, wenn man dem Producte der Buchſtaben das Product ihrer Coefficienten vorſchreibt.

Dieſemnach iſt ferner
$$8a \times 9b = 72ab$$
$$7a \times 3b \times 4c = 84abc$$
$$8ab \times 7cc = 56abcc. \text{ u.ſ.f.}$$

Weil jeder Buchſtabe a das Product iſt aus 1 und a; ſo hat auch jeder Buchſtabe 1 zum Coefficienten, obgleich man 1 nicht auszudrücken pflegt.

85. So oft ein aus verſchiedenen Theilen zuſammengeſetzter Ausdruck wie $3a + b$ ein Factor ſeyn ſoll; ſo iſt ſolcher in Klammern einzuſchließen, wie $(3a + b.)$

Es bedeutet daher $c(3a + b)$ oder $(3a + b)c$ das Product, wovon c der eine, und $3a + b$ der andere Factor iſt; und ebenſo bedeutet $(3a + b)(4c + d)$ das Product, wovon $3a + b$ der eine, und $4c + d$ der andere Factor iſt.

86. Es ſey $3a + b$ wirklich mit c zu multipliciren.

Wir werden ſonder Zweifel das Ganze $(3a + b)$ $c$mal nehmen, wenn wir jeden Theil davon $c$mal nehmen.

Daher iſt $(3a + b)c = 3ac + bc$,
$3d(2a + 3b + 4c) = 6ad + 9bd + 12cd$,
$5d(5ab + 6cd) = 25abd + 30cdd$.

87. Es ſey $3a + b$ mit $4c + d$ zu multipliciren.

Wir werden $3a + b$ ganz gewiß $4c + d$mal nehmen, wenn wir $3a + b$ erſtlich $4c$mal, und ſodann noch $d$mal nehmen, und dieſe beſondern Producten zuſammen addiren.

Daher iſt $(3a + b)(4c + d) = 12ac + 4bc + 3ad + bd$.

Sind $\left.\begin{array}{l} 3a + 2b + d \\ 2a + 3c \end{array}\right\}$ die Factoren;

ſo iſt $6aa + 4ab + 2ad$ das Product aus $2a$
und $9ac + 6bc + 3cd$ jenes aus $3c$

alſo $6aa + 4ab + 2ad + 9ac + 6bc + 3cd$ jenes aus $2a + 3c$.

Sind $\left.\begin{array}{l} 3a + 4b + 5c + 3d \\ 2a + 3b + 2c \end{array}\right\}$ die Factoren;

ſo iſt $6aa + 8ab + 10ac + 6ad$ das Product aus $2a$,
$9ab + 12bb + 15bc + 9bd$ jenes aus $3b$,
und $6ac + 8bc + 10cc + 6cd$ jenes aus $2c$,

alſo $6aa + 17ab + 16ac + 6ad + 12bb + 23bc + 9bd + 10cc + 6cd$ jenes aus $2a + 3b + 2c$.

Vom

Vom Multipliciren mit bejahenden und verneinenden Zahlen.

88.

Bisher haben wir immer nur bejahende Factoren geſetzet; und auch allemal ein bejahendes Product erhalten.

Nun iſt die Frage, ob das Product bejahend oder verneinend ſey, 1tens wenn ein Factor bejahend und der andere verneinend iſt, und 2tens wenn beede Factoren verneinend ſind.

Aus Nro 50 erhellet, daß eine bejahende Zahl, die immer um 1 kleiner wird, endlich 0 und ſodann verneinend werde. Wenn wir daher einen aus zweenen bejahenden Factoren immer um 1 kleiner nehmen, und beobachten, nach welchem Geſetze ſich jedesmal ihr Product ändere; ſo werden wir unfehlbar entdecken, ob es bejahend bleibe, oder verneinend werde, da dieſer Factor aus dem Bejahenden durch 0 in das Verneinende übergeht.

Es iſt aber

$3 \times 4 = 12$	$3 \times 1 = 3$
$3 \times 3 = 9$	$3 \times 0 = 0.$
$3 \times 2 = 6$	

So oft alſo der veränderliche Factor um 1 kleiner wird; ſo wird das Product um den andern Factor 3 kleiner: und wird jener gleich 0; ſo wird auch dieſes gleich 0. Daher wenn der veränderliche Factor um 1 kleiner als 0, oder — 1 wird; ſo muß auch das Product um 3 kleiner als 0 oder — 3 werden.

Folglich iſt ferner

$3 \times -1 = -3$	$3 \times -3 = -9$
$3 \times -2 = -6$	$3 \times -4 = -12.$

Setzen wir den andern Factor 3 immer um 1 kleiner; ſo iſt

$$3 \times 4 = 12 \quad || \quad 1 \times 4 = 4$$
$$2 \times 4 = 8 \quad || \quad 0 \times 4 = 0.$$

Es wird alſo das Product um den Factor 4 kleiner, ſo oft der andere Factor um 1 kleiner wird, und wieder mit dieſem gleich 0, folglich auch um 4 kleiner als 0, oder — 4, ſobald dieſer Factor um 1 kleiner als 0 oder — 1 wird. Daher iſt ferner

$$-1 \times 4 = -4 \quad || \quad -3 \times 4 = -12$$
$$-2 \times 4 = -8 \quad || \quad -4 \times 4 = -16.$$

Und weil allgemein jedes Product ab allemal die Summe von ſo viel b iſt, als a Einheiten hat; ſo wird ab um b, 2b, 3b, 4b kleiner, ſobald a um 1, 2, 3, 4 kleiner wird, folglich mit a gleich 0, und um b, 2b, 3b, 4b kleiner als 0 oder — b, — 2b, — 3b, — 4b, ſobald a kleiner als 0 gleich — 1, — 2, — 3, — 4 wird.

Ein bejahender und ein verneinender Factor geben alſo allemal ein verneinendes Product.

Setzen wir einen verneinenden und einen bejahenden Factor, und laſſen dieſen wieder kleiner werden; ſo iſt

$$-4 \times 5 = -20 \quad || \quad -4 \times 2 = -8$$
$$-4 \times 4 = -16 \quad || \quad -4 \times 1 = -4$$
$$-4 \times 3 = -12 \quad || \quad -4 \times 0 = 0.$$

Es wird alſo in dieſem Falle das Product um 4 größer, ſo oft der bejahende Factor um 1 kleiner wird: und iſt dieſer gleich 0; ſo iſt auch das Product gleich 0. Wird folglich dieſer um 1 kleiner als 0 oder — 1; ſo wird das Product um 4 größer als 0 oder + 4.

Daher iſt

$$-4 \times -1 = +4 \quad || \quad -4 \times -4 = +16$$
$$-4 \times -2 = +8 \quad || \quad -4 \times -5 = +20$$
$$-4 \times -3 = +12 \quad || \quad -4 \times -6 = +24.$$

Und

Und weil allgemein jedes verneinende Product — ab allemal die Summe von ſo viel verneinenden b iſt, als a Einheiten enthält; ſo wird dieſes Product — ab um b, 2b, 3b, 4b größer, ſo oft a um 1, 2, 3, 4 kleiner wird, folglich mit a gleich 0 und um b, 2b, 3b, 4b größer als 0, oder + b, + 2b, + 3b, + 4b, ſobald a kleiner als 0 gleich — 1, — 2, — 3, — 4 wird.

Zween verneinende Factoren geben daher allemal ein bejahendes Product.

89. Noch leichter kömmt man auf die nämlichen Wahrheiten, wenn man den Begriff einer verneinenden Zahl mit dem Begriffe eines Factors, wie folgt, verbindet.

Eine verneinende Zahl bedeutet allemal das Entgegengeſetzte desjenigen, was ſie als bejahend bedeutet. Nun zeigt ein bejahender Factor an, wie oft der andere Factor zu 0 zu addiren ſey, damit ihr Product herauskomme; folglich muß ein verneinender Factor anzeigen, wie oft der andere Factor von 0 abzuziehen ſey, damit ihr Product zum Vorſchein komme.

Daher iſt

1tens $+4 \times +3$ ſo viel, als $+4$ 3mal zu 0 addirt; folglich $+4 \times +3 = 0 + 4 + 4 + 4 = +12$;

und $-4 \times +3$ ſo viel, als -4 3mal zu 0 addirt; folglich $-4 \times +3 = 0 - 4 - 4 - 4 = -12$:

2tens $+4 \times -3$ ſo viel, als $+4$ 3mal von 0 abgezogen; folglich $+4 \times -3 = 0 - 4 - 4 - 4 = -12$;

und -4×-3 ſo viel, als -4 3mal von 0 abgezogen; folglich $-4 \times -3 = 0 + 4 + 4 + 4 = +12$.

Da nun dieſes auf jede zween Factoren ſowohl als auf 4 und 3 paſſet; ſo können wir allgemein ſchließen, daß zween Factoren von gleicher Bezeichnung allemal ein bejahendes, und zween Factoren von verſchiedener Bezeichnung allemal ein verneinendes Product geben.

Es iſt daher $(3a - b) \times 4c = 12ac - 4bc$
$(3a - 5b) \times -2c = -6ac + 10bc$.

Und ſind $\left.\begin{matrix} 3a - 2b \\ 5a - 6b \end{matrix}\right\}$ die Factoren;

ſo iſt $15aa - 10ab$ das Product aus $+5a$
$-18ab + 12bb$ jenes aus $-6b$

alſo $15aa - 28ab + 12bb$ das Product aus $5a - 6b$.

Sind $\left.\begin{matrix} 3a + 4b \\ 2a - 7b \end{matrix}\right\}$ die Factoren;

$$\begin{array}{l} 6aa + 8ab \\ \quad\; - 21ab - 28bb \end{array}$$

ſo iſt $6aa - 13ab - 28bb$ ihr Product.

Endlich ſind $\left.\begin{matrix} 3a + 2b - 4d \\ 3a - 2b + 4d \end{matrix}\right\}$ die Factoren;

$$\begin{array}{l} 9aa + 6ab - 12ad \\ -6ab - 4bb + 8bd \\ 12ad + 8bd - 16dd \end{array}$$

ſo iſt $9aa - 4bb + 16bd - 16dd$ ihr Product.

Vom

Vom Dividiren mit Buchſtaben oder algebraiſchen Zahlen.

90.

Weil es beym Dividiren nur darauf ankömmt, daß man die Zahl finde, welche mit dem Theiler multiplicirt, das Dividend giebt; ſo iſt leicht einzuſehen,

daß $ab : b = a$, weil $a \times b = ab$;
$abc : a = bc$, weil $bc \times a = abc$;
$abc : ab = c$, weil $c \times ab = abc$;
$6ab : 3a = 2b$, weil $2b \times 3a = 6ab$;
$8abc : 2ac = 4b$, weil $4b \times 2ac = 8abc$;
$10abc : 5c = 2ab$, weil $2ab \times 5c = 10abc$;

Man dividirt nämlich den Coefficienten des Dividends durch den Coefficienten des Theilers, und ſchreibt unmittelbar nach dem Quotienten, den man erhält, jene Buchſtaben des Dividends, die der Theiler nicht enthält.

Dieſemnach iſt ferner:

$12abd : 4ad = 3b$	$abc : 6ab = \frac{1}{6}c$
$24abde : 8be = 3ad$	$6ab : 2ab = 3$
$24abde : 6ae = 4bd$	$5abc : 6bc = \frac{5}{6}a$

91. Sind die Buchſtaben des Theilers nicht alle in dem Dividenden enthalten; ſo muß man ſich mit dem gebrochenen Quotienten begnügen.

So iſt $a : b = \frac{a}{b}$, und $ab : def = \frac{ab}{def}$.

Von welchen Quotienten wir wenigſtens ſo viel wiſſen, daß ſie mit dem Theiler multiplicirt, wieder das Dividend geben;

oder daß $\frac{a}{b} \times b = a$, und $\frac{ab}{def} \times def = ab$.

92. So oft das Dividend oder der Theiler ein zuſammengeſetzter Ausdruck iſt; ſo wird ſolcher in Klammern eingeſchloſſen.

Daher heißt $(6ab + 12ad + 30acd) : 3a$ ſo viel als:
es ſey dieſer ganze Ausdruck $6ab + 12ad + 30acd$ durch $3a$ zu theilen. Dieſes wird man ſonder Zweifel verrichten, wenn man ſucht, wie oft $3a$ in jedem Theile dieſes Ausdruckes enthalten iſt.

Es iſt aber $3a$ in $6ab$, $2b$mal
in $12ad$, $4d$mal
und in $30acd$, $10cd$mal, alſo

in $(6ab + 12ad + 30acd)$, $(2b + 4d + 10cd)$, mal enthalten.

Oder $(6ab + 12ad + 30acd) : 3a = 2b + 4d + 10cd$.

Eben ſo iſt $(14abd + 21abc + 35abde) : 7ab = 2d + 3c + 5de$

und $(10ab + 25abd + 30bde + 45d) : 5b = 2a + 5ad + 6de + 9\frac{d}{b}$.

93. Wenn der Theiler auch ein zuſammengeſetzter Ausdruck iſt; ſo geht man wieder wie bey den Zahlen zu Werke, und ſieht anfänglich nur auf den 1ſten Theil des Theilers. So findet man

$$(15ac + 18ad + 20bc + 24bd) : (3a + 4b) = 5c + 6d.$$

$$\begin{array}{l} 15ac \quad + 20bc \\ \hline + 18ad + 24bd \\ + 18ad + 24bd \\ \hline 0 \end{array}$$

wenn

wenn man ſagt:

1tens $3a$ in $15ac$ iſt $5c$mal enthalten; denn $(3a + 4b) \times 5c = 15ac + 20bc$, von $15ac + 18ad + 20bc + 24bd$ abgezogen, giebt $18ad + 24bd$ zum Reſte: und

2tens $3a$ in $18ad$ iſt $6d$mal enthalten; denn $(3a + 4b) \times 6d = 18ad + 24bd$, von $18ad + 24bd$ abgezogen, läßt nichts zum Reſte. Ebenſo findet man

$$
\begin{array}{l}
 [= 3a + 2b + d, \\
(6aa + 4ab + 2ad + 9ac + 6bc + 3cd) : (2a + 3c) \\
\underline{6aa \qquad\quad + 9ac} \\
\quad 4ab + 2ad + 6bc + 3cd \\
\quad \underline{4ab \qquad\quad + 6bc} \\
\qquad\quad 2ad + 3cd \\
\qquad\quad \underline{2ad + 3cd} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

wenn man ſagt:

1tens $2a$ in $6aa$ iſt $3a$mal enthalten; denn $(2a + 3c) \times 3a = 6aa + 9ac$, von $6aa + 4ab + 2ad + 9ac + 6bc + 3cd$ abgezogen, giebt $4ab + 2ad + 6bc + 3cd$ zum Reſte;

2tens $2a$ in $4ab$ iſt $2b$mal enthalten; denn $(2a + 3c) \times 2b = 4ab + 6bc$, von $4ab + 2ad + 6bc + 3cd$ abgezogen, giebt $2ad + 3cd$ zum Reſte;

3tens $2a$ in $2ad$ iſt $d$mal enthalten denn $(2a + 3c) \times d = 2ad + 3cd$, von $(2ad + 3cd)$ abgezogen, läßt nichts zum Reſte.

94. Läßt ſich das Dividiren auf ſolche Art nicht verrichten; ſo muß man mit dem gebrochenen Quotienten zufrieden ſeyn.

So iſt $(3a + 6b) : (m + 3q) = \frac{3a + 6b}{m + 3q}$; von welchem Quotienten wir wenigſtens ſo viel wiſſen, daß

$$\left(\frac{3a + 6b}{m + 3q}\right) \times (m + 3q) = 3a + 6b.$$

Vom Dividiren mit bejahenden und verneinenden Zahlen.

95.

Weil das Dividend nichts anders iſt, als ein Product aus einem bekannten Factor, dem Theiler; und einem unbekannten, dem Quotienten: und ein bejahendes Product allemal zu zween Factoren von gleicher Bezeichnung, ein verneinendes aber zu zween Factoren von entgegengeſetzter Bezeichnung gehört; ſo werden der Theiler und der Quotient von gleicher Bezeichnung ſeyn, wenn das Dividend bejahend, und von ungleicher Bezeichnung, wenn es verneinend iſt.

Daher wird

1tens $\begin{cases} + ab : + b = a \\ + ab : - b = - a \end{cases}$

2tens $\begin{cases} - ab : + b = - a \\ - ab : - b = + a \end{cases}$

Folglich iſt der Quotient bejahend, wenn das Dividend und der Theiler gleiche Zeichen; und verneinend, wenn das Dividend und der Theiler entgegengeſetzte Zeichen haben.

Die-

Dieſemnach iſt

$$\begin{array}{l} 12 : 4 = 3 \\ 12 : -4 = -3 \\ -12 : 4 = -3 \\ -12 : -4 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15ab : -3a = -5b \\ -26abd : -13ad = 2b \\ aa + 2ab - 30ad : 2a = \frac{1}{2}a + b - 15d \\ aa + 6ab - 21ad : -7a = -\frac{1}{7}a - \frac{6}{7}b + 3d. \end{array}$$

Ferner wird man finden, daß

$$(aa - bb) : (a - b) = a + b.$$

$$\begin{array}{r} aa - ab \\ \hline ab - bb \\ ab - bb \\ \hline 0 \end{array}$$

wenn man ſagt:

1tens $+ a$ in $+ aa$ iſt $+ a$mal enthalten; denn $(a - b) \times + a = + aa - ab$, von $+ aa - bb$ abgezogen, giebt $+ ab - bb$ zum Reſte:

2tens $+ a$ in $+ ab$ iſt $+ b$mal enthalten; denn $(a - b) \times + b = + ab - bb$, von $+ ab - bb$ abgezogen, läßt nichts zum Reſte.

Ferner findet man

$$(aa - bb) : (a + b) = a - b.$$

$$\begin{array}{r} aa + ab \\ \hline - ab - bb \\ - ab - bb \\ \hline 0 \end{array}$$

wenn man ſagt:

1tens $+a$ in $+aa$ iſt $+a$mal enthalten; denn $(+a+b)\times a = aa + ab$, von $aa - bb$ abgezogen, giebt $-ab - bb$ zum Reſte;

2tens $+a$ in $-ab$ iſt $-b$mal enthalten; denn $(a+b)\times -b = -ab - bb$, von $-ab - bb$ abgezogen, läßt keinen Reſt.

Ferner iſt $(aa - 1) : (a + 1) = a - 1$

$$\begin{array}{r} aa + a \\ \hline -a - 1 \\ -a - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$(aa - 2ab + bb) : (a - b) = a - b$

$$\begin{array}{r} aa - ab \\ \hline -ab + bb \\ -ab + bb \\ \hline 0 \end{array}$$

$(9aa - 12ab + 4bb) : (3a - 2b) = 3a - 2b$

$$\begin{array}{r} 9aa - 6ab \\ \hline -6ab + 4bb \\ -6ab + 4bb \\ \hline 0 \end{array}$$

$(6aa - 13ab - 28bb) : (3a + 4b) = 2a - 7b$

$$\begin{array}{r} 6aa + 8ab \\ \hline -21ab - 28bb \\ -21ab - 28bb \\ \hline 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} [= 3a - 2b + 4d \\ \text{und } (9aa - 4bb + 16bd - 16dd) : (3a + 2b - 4d) \\ \quad 9aa + 6ab - 12ad \\ \hline - 6ab + 12ad - 4bb + 16bd - 16dd \\ - 6ab - 4bb + 8bd \\ \hline \quad 12ad + 8bd - 16dd \\ \quad 12ad + 8bd - 16dd \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

96. Das Dividend und der Theiler mögen nun was immer für zwo ganze Zahlen ſeyn; ſo können wir allemal ihren Quotienten finden, der bald eine ganze, bald eine gebrochene, bald eine aus einer ganzen und einer gebrochenen zuſammengeſetzte Zahl iſt. So iſt

$12 : 3 = 4$ eine ganze Zahl
$12 : 17 = \frac{12}{17}$ eine gebrochene Zahl
$12 : 5 = 2\frac{2}{5}$ eine aus der ganzen 2 und der gebrochenen $\frac{2}{5}$ zuſammengeſetzte Zahl.

Verlangt man aber, daß jedesmal der Quotient auch eine ganze Zahl ſeyn ſoll; ſo läßt ſich in dieſem Verſtande keine Zahl mehr durch eine größere theilen: denn in ſolchem Falle iſt der Quotient allemal ein Bruch. Doch weil jede Zahl $a = 1 \times a$; ſo läßt ſich jede Zahl durch 1 und durch ſich ſelbſt theilen.

Ferner weil $ac : c = a$, und $nac : c = na$;

ſo wird jede Zahl c, die jede andere ac theilet, auch allemal jedes Vielfache nac von dieſer andern ac theilen.

Z. B. Weil 3 die Zahl 6 theilet; ſo iſt auch $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$, $4 \times 6 = 24$, und $n \times 6 = 6n$ durch 3 theilbar.

Und weil $(ac + bc) : c = a + b$, und
$(ac - bc) : c = a - b$;

ſo

ſo wird jede Zahl c, die was immer für zwo andere ac und bc theilet, auch allemal ihre Summe ac + bc, und ihren Unterſcheid ac — bc theilen.

So weil 4 ſowohl 24 als 16 theilet; ſo wird auch 24 + 16 = 40, und 24 — 16 = 8 durch 4 theilbar ſeyn.

Jene Zahlen, die nur durch 1 und durch ſich ſelbſt theilbar ſind, werden einfache oder Primzahlen genennt.

Sie ſind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 u. ſ. f.

Jene aber, die ſich nicht nur durch 1 und durch ſich ſelbſt, ſondern auch durch andere ganze Zahlen theilen laſſen, heißen vielfache Zahlen, oder Producten.

Sie ſind: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30 u. ſ. f.

Weil $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$,
$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$,
$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$,
$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$;

ſo iſt leicht einzuſehen, daß jede vielfache Zahl ein Product aus lauter Primzahlen iſt. Denn ſollte einer aus ihren Factoren ein Vielfaches ſeyn; ſo könnten allemal anſtatt deſſen ſeine Factoren geſetzet werden;

Es wird daher unterſuchet, wie

Von jeder Zahl alle einfachen Factoren zu finden.

97.

Nur alsdann iſt eine Primzahl von einer vielfachen Zahl ein Factor, wenn ſich dieſe durch jene ohne Reſt theilen

len läßt. Es kömmt alſo nur darauf an, daß wir beſtimmen, durch welche Primzahlen jedes Vielfache theilbar ſey.

Nun iſt 10 durch 2 theilbar; alſo iſt es auch jedes Vielfache von 10, oder jede Zahl ohne ihre Einheiten betrachtet. Es laſſen ſich daher alle Zahlen durch 2 theilen, deren Einheiten durch 2 theilbar ſind; oder deren niedrigſte Stelle mit 0, 2, 4, 6, oder 8 beſetzet iſt. Sie heißen gerade Zahlen, und ſind: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 u. ſ. f. Die andern werden ungerade Zahlen genennt, und ſind: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25 u. ſ. f.

Ebenſo weil 10 ſich durch 5 theilen läßt; ſo iſt jede Zahl durch 5 theilbar, deren Einheiten ſich durch 5 theilen laſſen, oder deren niedrigſte Stelle mit 0 oder 5 beſetzet iſt.

Jeder Zehner, durch 3 getheilt, giebt 1 zum Reſte. Alſo geben 2 Zehner 2, 3 Zehner 0, 4 Zehner 1, 5 Zehner 2, 6 Zehner 0, 7 Zehner 1, 8 Zehner 2, 9 Zehner 0, und 10 Zehner oder jedes Hundert 1 zum Reſte.

Alſo geben 2 Hunderte 2, 3 Hunderte 0, 4 Hunderte 1, 5 Hunderte 2, 6 Hunderte 0, 7 Hunderte 1, 8 Hunderte 2, 9 Hunderte 0, und 10 Hunderte oder jedes Tauſend 1 zum Reſte.

Alſo geben 2 Tauſende 2, 3 Tauſende 0, 4 Tauſende 1, 5 Tauſende 2, 6 Tauſende 0, 7 Tauſende 1, 8 Tauſende 2, 9 Tauſende 0, und 10 Tauſende oder jedes Zehntauſend 1 zum Reſte. u. ſ. f.

Es geben alſo die Zehner, Hunderte, Tauſende, oder Zehntauſende einer Zahl durch 3 getheilt allemal ebenjenen Reſt, den man erhält, wenn man ebenſoviel Einheiten durch 3 theilet.

Jede Zahl iſt alſo durch 3 theilbar; ſo bald die Reſte aller ihrer Ziffern zuſammenaddirt, eine Summe geben, die ſich durch 3 theilen läßt.

So

So iſt 54672 durch 3 theilbar, weil der Reſt von $5 = 2$, von $4 = 1$, von $6 = 0$, von $7 = 1$, von $2 = 2$; die Summe dieſer Reſte $2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6$, und $6 : 3 = 2$ ohne Reſt.

Ebenſo iſt auch 458781 durch 3 theilbar, weil der Reſt von $4 = 1$, von $5 = 2$, von $8 = 2$, von $7 = 1$, von $8 = 2$, von $1 = 1$; die Summe dieſer Reſte $1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 9$; und $9 : 3 = 3$ ohne Reſt.

84557 aber iſt nicht durch 3 theilbar, weil der Reſt von $8 = 2$, von $4 = 1$, von $5 = 2$, von $5 = 2$, von $7 = 1$; die Summe dieſer Reſte $2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8$, und $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$.

98. Es läßt ſich alſo leicht angeben, ob eine vorgelegte Zahl durch 2, 3 oder 5 theilbar iſt; ob ſolche aber ſich durch 7, 11, 13, 17, 19 oder eine höhere Primzahl theilen laſſe, das kann nur durch wirkliches Verſuchen entſchieden werden.

Wir haben daher auch kein anderes Mittel alle einfachen Factoren einer gegebenen Zahl zu finden, als daß wir ſolche durch die niedrigſten Primzahlen ſo lange dividiren, bis endlich der Quotient ſelbſt eine Primzahl iſt, und folglich mit den vorigen Theilern alle einfachen Factoren der gegebenen Zahl ausmacht.

Es ſey die gegebene Zahl 2310; ſo iſt

$$2310 : 2 = 1155 \quad\|\quad 385 : 5 = 77$$
$$1155 : 3 = 385 \quad\|\quad 77 : 7 = 11$$

alſo $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

Es

Es ſey die gegebene Zahl 360; ſo iſt

360 : 2 = 180	45 : 3 = 15
180 : 2 = 90	15 : 3 = 5
90 : 2 = 45	

alſo 360 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5.

Es ſey die gegebene Zahl 37800; ſo iſt

37800 : 2 = 18900	1575 : 3 = 525
18900 : 2 = 9450	525 : 3 = 175
9450 : 2 = 4725	175 : 5 = 35
4725 : 3 = 1575	35 : 5 = 7,

alſo 37800 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 5 × 5 × 7.

Es ſey die gegebene Zahl 2717; ſo iſt

2717 : 11 = 247, und 247 : 13 = 19;

alſo 2717 = 11 × 13 × 19.

Es ſey die gegebene Zahl 311.

Weil 311 durch 2, 3 oder 5 nicht theilbar iſt; ſo verſuchen wir dieſe Zahl durch die nächſthöhern Primzahlen zu theilen.

Es iſt aber

1tens 311 : 7 = $44\frac{3}{7}$,

2tens 311 : 11 = $28\frac{3}{11}$,

```
22
--
 91
 88
 --
  3
```

3tens

3tens $311 : 13 = 23\frac{12}{13}$.
26
――
51
39
――
12

4tens $311 : 17 = 18\frac{5}{17}$.
17
――
141
136
――
5

Weil nun 19 größer iſt als der Quotient $18\frac{5}{17}$; ſo kann 19 nicht 17mal in 311 enthalten ſeyn. Es iſt daher der Quotient von (311 : 19) kleiner als 17, folglich keine ganze Zahl, indem die angeſtellten Verſuche zeigen, daß keine aus den Primzahlen, die kleiner ſind als 17, von 311 ein Factor iſt; welches aber doch ſeyn müßte, ſo bald (311 : 19) eine ganze Zahl zum Quotienten gäbe, die kleiner wäre als 17; folglich läßt ſich 311 durch keine Zahl als durch 1 und durch ſich ſelbſt theilen, oder 311 iſt ſelbſt eine Primzahl.

Ebenſo wird man von jeder Zahl, wie von 311 behaupten können, daß ſie eine Primzahl iſt; nachdem man die Verſuche, ſolche durch die kleinſten Primzahlen zu dividiren ohne einen Theiler zu finden, ſo weit fortgeſetzet hat, bis man auf eine wie 19 gekommen iſt, die größer iſt, als der vorhergehende Quotient $18\frac{5}{17}$.

99. In der felkelſchen Factorentafel, welche alle Zahlen, die durch 2, 3, oder 5 nicht theilbar ſind, bis auf 144000 enthält, ſind die Primzahlen ausgeſetzet, und von jedem Producte die einfachen Factoren angezeigt.

Nachdem man alſo eine gegebene Zahl, durch 2, 3 und 5, ſo oft es angeht, dividiret hat; ſo kann man den letzten Quotienten, wenn er 144000 nicht überſteigt, in dieſer Tafel nachſchlagen, und ohne Mühe finden, ob er

eine

eine Primzahl, oder aus welchen Factoren er ein Vielfaches iſt.

Es ſey die gegebene Zahl 120765; ſo findet man

$$120765 : 3 = 40255$$
$$40255 : 5 = 8051$$ und mittelſt der Tafel
$$8051 = 83 \times 97$$
alſo $120765 = 3 \times 5 \times 83 \times 97.$

Es ſey die gegebene Zahl 693132; ſo findet man

$$693132 : 2 = 346566$$
$$346566 : 2 = 173283$$
$$173283 : 3 = 57761$$ und vermittelſt der Tafel
$$57761 = 11 \times 59 \times 89.$$
alſo $693132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 59 \times 89.$

100. Iſt die gegebene Zahl ein algebraiſcher einzelner Ausdruck; ſo iſt jeder Buchſtabe ein Factor davon. So iſt

$$abcde = a \times b \times c \times d \times e.$$

Und iſt die gegebene Zahl ein zuſammengeſetzter Ausdruck, und ein Vielfaches von einem einzelnen und einem zuſammengeſetzten Factor, wie $ab + ac - ad$; ſo wird der einzelne Factor a daran erkennet, daß er ein Factor von jedem Theile des Vielfachen iſt; und der zuſammengeſetzte Factor $b + c - d$ gefunden, wenn man das Vielfache durch den einzelnen dividirt. Dieſemnach iſt leicht einzuſehen daß z. B.

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$
$$abc + abd - abe = ab(c + d - e)$$
$$abc - acd - bcd = c(ab - ad - bd)$$
$$aa - ab + a = a(a - b + 1)$$
$$aa - 7a + ab = a(a - 7 + b)$$
$$abd - acd + ad = ad(b - c + 1)$$
$$6ab - 12bc - 3b = 3b(2a - 4c - 1)$$
$$ab - bb = b(a - b)$$
$$cc - c = c(c - 1)$$

 Iſt

Iſt aber der zuſammengeſetzte Ausdruck ein Vielfaches von mehrern zuſammengeſetzten Factoren; ſo kann uns blos eine aufmerkſame Uebung lehren, daß z. B.

$$aa + 2ab + bb = (a + b)(a + b)$$
$$aa - 2ab + bb = (a - b)(a - b)$$
$$aa - bb = (a + b)(a - b)$$
$$aa + 2a + 1 = (a + 1)(a + 1)$$
$$aa - 2a + 1 = (a - 1)(a - 1)$$
$$aa - 1 = (a + 1)(a - 1)$$
$$aa - bb + 2bc - cc = (a + b - c)(a - b + c)$$

101. Da jedes Vielfache abcde ſich nicht nur durch jeden einfachen Factor, ſondern auch durch jedes Product aus je 2, je 3, je 4 derſelben u. ſ. f. ohne Reſt theilen läßt, ſo wird man

Von jeder Zahl alle Theiler finden,

Wenn man erſtlich alle ihre einfachen Factoren, und ſodann alle Producten aus je 2, je 3, je 4 derſelben u. ſ. f. ſuchet. Daher

weil abcde = a × b × c × d × e; ſo ſind die Theiler

1tens a, b, c, d, e;
2tens ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de;
3tens abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde;
4tens abcd, abce, abde, acde, bcde;
5tens abcde und 1.

Weil aabcd = a × a × b × c × d; ſo ſind die Theiler

1tens a, b, c, d,
2tens aa, ab, ac, ad, bc, bd, cd,

3tens

3tens aab, aac, aad, abc, abd, acd, bcd,
4tens aabc, aabd, aacd, abcd,
5tens aabcd und 1.

Weil $aaabc = a \times a \times a \times b \times c$; ſo ſind die Theiler
1tens a, b, c,
2tens aa, ab, ac, bc,
3tens aaa, aab, aac, abc,
4tens aaab, aaac, aabc,
5tens aaabc und 1.

Ebenſo weil $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$; ſo ſind die Theiler

1tens 2, 3, 5, 7, 11.

2tens

$2 \times 3 = 6$	$3 \times 7 = 21$
$2 \times 5 = 10$	$3 \times 11 = 33$
$2 \times 7 = 14$	$5 \times 7 = 35$
$2 \times 11 = 22$	$5 \times 11 = 55$
$3 \times 5 = 15$	$7 \times 11 = 77$

3tens

$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 7 \times 11 = 154$
$2 \times 3 \times 7 = 42$	$3 \times 5 \times 7 = 105$
$2 \times 3 \times 11 = 66$	$3 \times 5 \times 11 = 165$
$2 \times 5 \times 7 = 70$	$3 \times 7 \times 11 = 231$
$2 \times 5 \times 11 = 110$	$5 \times 7 \times 11 = 385$

4tens
$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$
$2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$
$2 \times 5 \times 7 \times 11 = 770$
$3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155$

5tens 1 und 2310.

Weil $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$; ſo ſind die Theiler

1tens 2, 3, 5

2tens
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$
$2 \times 5 = 10$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 5 = 15$

$$\text{3tens}\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 2 \times 2 \times 5 = 20 \\ 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{array}\right.$$

$$\text{4tens}\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 \end{array}\right.$$

$$\text{5tens}\left\{\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120 \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180 \end{array}\right.$$

6tens 1 und 360.

Endlich weil $2717 = 11 \times 13 \times 19$; ſo ſind die Theiler

$$\text{1tens}\left\{\begin{array}{l} 11 \\ 13 \\ 19 \end{array}\right. \qquad \text{2tens}\left\{\begin{array}{l} 11 \times 13 = 143 \\ 11 \times 19 = 209 \\ 13 \times 19 = 247 \end{array}\right.$$

$$\text{3tens}\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ und} \\ 2717 \end{array}\right.$$

102. Zerleget man jede aus zwoen Zahlen in ihre einfachen Factoren; ſo werden auch allemal jene bekannt, die beeden Zahlen gemein ſind: und ſuchet man ferner die Producten aus je 2, je 3, und je 4 von dieſen einfachen gemeinen Factoren; ſo erhält man auch alle ihre gemeinen Theiler, unter denen das Product aus allen gemeinen einfachen Factoren jedesmal der größte ſeyn wird.

So weil $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ und
$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$;

ſo ſind ihre gemeinen einfachen Factoren 2, 3, 5; alſo ihre gemeinen Theiler,

1tens

1tens $\begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases}$ 2tens $\begin{cases} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$

3tens $\begin{cases} 1 \text{ und} \\ 30, \end{cases}$

und ihr größter gemeiner Theiler $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Weil oft viel daran liegt, den größten gemeinen Theiler zwoer Zahlen zu kennen, und die Methode jede Zahl in ihre einfachen Factoren aufzulöſen, beſonders für einen, der die Factorentafel nicht bey Handen hat, ſehr beſchwerlich iſt; ſo wollen wir eine beſondere Methode ausfindig zu machen ſuchen

Von jeden zwoen Zahlen den größten gemeinen Theiler zu finden.

103.

Es ſey die größere der gegebenen Zahlen a, die kleinere b, und der größte gemeine Theiler x.

Weil x nun b theilet; ſo kann x nie größer als b, allemal aber gleich b ſeyn, wenn a durch b theilbar iſt.

Theilen wir daher a durch b, und ſetzen, der Quotient ſey m; ſo iſt der Reſt $a - mb = 0$; und folglich $x = b$: oder dieſer Reſt $a - mb = c$ iſt kleiner als der Theiler b; und in dieſem Falle muß x auch c theilen: denn x theilet b, alſo auch mb; und theilet a, folglich theilet x auch ihren Unterſcheid $a - mb = c$.

Läßt alſo a : b keinen Reſt; ſo iſt $x = b$; und läßt a : b einen Reſt c; ſo iſt x auch der größte gemeine Theiler von b und c.

Läßt alſo b : c keinen Reſt; ſo iſt $x = c$; und läßt b : c einen Reſt d; ſo iſt x auch der größte gemeine Theiler von c und d.

Läßt alſo c : d keinen Reſt; ſo iſt x = d: und läßt c : d einen Reſt e; ſo iſt x auch der größte gemeine Theiler von d und e.

Läßt alſo d : e keinen Reſt; ſo iſt x = e; und läßt d : e einen Reſt f; ſo iſt x auch der größte gemeine Theiler von e und f, alſo wieder gleich f, ſo bald e : f keinen Reſt mehr läßt.

Wenn man daher die größere Zahl durch die kleinere, die kleinere durch den Reſt, den 1ten Reſt durch den 2ten, den 2ten durch den 3ten, den 3ten durch den 4ten u. ſ. f. theilet, bis endlich ein Reſt gleich o wird; ſo iſt der letzte Theiler der größte gemeine Theiler der gegebenen Zahlen. Oder wenn

1tens $a : b = m$, . . und $a - bm = c$
bm

2tens $b : c = n$, ... und $b - cn = d$
cn

3tens $c : d = p$, ... und $c - dp = e$
dp

4tens $d : e = q$, ... und $d - eq = f$
eq

5tens $e : f = r$, ... und $e - fr = o$;
fr
o

ſo iſt $x = f$.

Es ſeyen die gegebenen Zahlen 27 und 12;

ſo iſt $27 : 12 = 2$
24
$12 : 3 = 4$
12
o

alſo 3 der größte gemeine Theiler von 27 und 12.

Es

Es ſeyen die gegebenen Zahlen 1001 und 210;

ſo iſt 1001 : 210 = 4
840
210 : 161 = 1
161
161 : 49 = 3
147
49 : 14 = 3
42
14 : 7 = 2
14
0

alſo 7 der größte gemeine Theiler von 1001 und 210.

Es ſeyen die gegebenen Zahlen 2310 und 360;

ſo iſt 2310 : 360 = 6
2160
360 : 150 = 2
300
150 : 60 = 2
120
60 : 30 = 2
60
0

alſo 30 der größte gemeine Theiler von 2310 und 360.

Es ſeyen die gegebenen Zahlen 77844052 und 627900; ſo iſt

778440(52 : 6279(00 = 123
6279
15054
12558
24960
18837
627900 : 612352 = 1
612352
612352 : 15548 = 39
46644
145912
139932
5980
15548 : 5980 = 2
11960
5980 : 3588 = 1
3588
3588 : 2392 = 1
2392
2392 : 1196 = 2
2392
0

alſo 1196 der größte gemeine Theiler von 77844052 und 627900.

Es ſeyen die gegebenen Zahlen 58604 und 4665;

ſo iſt 58604 : 4665 = 12
4665
11954
9330
4665 : 2624 = 1
2624
2624 : 2041 = 1
2041
2041 : 583 = 3
1749
292
583 : 292 = 1
292
292 : 291 = 1
291
291 : 1 = 291
291
0

alſo haben 58604 und 4665 keinen gemeinen Theiler als 1.

104. Ehe wir zu den gebrochenen Zahlen, wovon oben die Rede war, ſchreiten, wollen wir noch

Von der Verbindung der Factoren mit ihrem Producte

Ueberhaupt handeln, und unterſuchen; 1tens was mit dem Producte vorgeht, wenn man einen ſeiner Factoren mit jeder Zahl multipliciret oder dividiret; und 2tens

wie der Quotient ſich ändert, wenn das Dividend oder der Theiler durch jede Zahl multiplicieret oder dividiret wird.

Es ſeyen die Factoren a und b; ſo iſt

$$a \times b = ab.$$

Multiplicieren wir nun einen Factor a mit jeder Zahl c, und laſſen den andern Factor b beſtändig:

ſo wird $ac \times b = abc = ab \times c.$

Das Product wird alſo 1tens durch was immer für eine Zahl multipliciret, wenn man einen ſeiner Factoren durch dieſelbe multipliciret.

So iſt $(6 \times 3) \times 4 = 24 \times 3 = 6 \times 12.$

Es ſeyen die Factoren ac und b; ſo iſt

$$ac \times b = abc.$$

Dividiren wir nun einen Factor ac durch jede Zahl c, und laſſen den andern Factor b beſtändig; ſo wird

$$a \times b = ab = abc : c.$$

Das Product wird alſo 2tens durch was immer für eine Zahl dividiret, wenn man einen ſeiner Factoren durch dieſelbe dividiret.

So iſt $(18 \times 12) : 6 = 3 \times 12 = 18 \times 2.$

Es ſeyen die Factoren ac und b; ſo iſt

$$ac \times b = abc.$$

Multiplicieren wir nun einen Factor b, und dividiren den andern ac durch dieſelbe Zahl c; ſo wird

$a \times bc = abc$, wie zuvor.

Das Product bleibt alſo 3tens beſtändig, wenn man einen ſeiner Factoren durch jede Zahl mul-

multipliret, und den andern durch dieſelbe dividiret.

So iſt $36 \times 18 = 72 \times 9 = 216 \times 3$.

Es ſey das Dividend abc, und der Theiler bc;

ſo iſt $abc : bc = a$.

Multipliciren wir nun das Dividend abc durch c, und laſſen den Theiler bc beſtändig; ſo wird

$abcc : bc = ac = a \times c$.

Oder dividiren wir den Theiler bc durch c, und laſſen das Dividend abc beſtändig; ſo wird

$abc : b = ac = a \times c$ wie zuvor.

Der Quotient wird alſo 1tens durch jede Zahl multipliciret, wenn man durch dieſelbe das Dividend multipliciret, oder den Theiler dividiret.

So iſt $(18 : 6) \times 3 = 54 : 6 = 18 : 2$.

Es ſey das Dividend abc, und der Theiler b;

ſo iſt $abc : b = ac$.

Dividiren wir nun das Dividend abc durch c, und laſſen den Theiler b beſtändig; ſo wird

$ab : b = a = ac : c$.

Oder multipliciren wir den Theiler b durch c, und laſſen das Dividend abc beſtändig; ſo wird

$abc : bc = a = ac : c$ wie zuvor.

Der Quotient wird alſo 2tens durch jede Zahl dividiret, wenn man durch dieſelbe das Dividend dividiret, oder den Theiler multipliciret.

So iſt $(36 : 6) : 2 = 18 : 6 = 36 : 12$.

Es

Es ſey das Dividend abc und der Theiler bc;
ſo iſt abc : bc = a.

Multipliciren wir nun das Dividend abc und den Theiler bc durch c; ſo wird

abcc : bcc = a wie zuvor.

Oder dividiren wir das Dividend abc und den Theiler bc durch c; ſo wird

ab : b = a wie zuvor.

Der Quotient bleibt alſo 3tens beſtändig, wenn man das Dividend und den Theiler durch die nämliche Zahl multiplicirет, oder beyde durch die nämliche dividiret.

So iſt 1tens 6 : 2 = 12 : 4 = 18 : 6 = 24 : 8
= 30 : 10 und

2tens 180 : 36 = 90 : 18 = 45 : 9
= 15 : 3 = 5 : 1 u. d. gl.

Von den gebrochenen Zahlen
oder Brüchen.

105.

Wenn was immer für eine Zahl a durch jede andere b zu theilen iſt; ſo kann man, wie angenommen, den Quotienten allemal ſo $\frac{a}{b}$ ausdrücken: und dann wird dieſer Quotient $\frac{a}{b}$ ein Bruch; das Dividend a der Zähler dieſes Bruchs, und der Theiler b deſſelben Nenner genennt.

106.

109. Weil das Dividend allemal zum Vorſchein kömmt, wenn man den Quotienten mit dem Theiler multipliciret;

ſo iſt $\frac{a}{b} \times b = a$

Wenn man alſo einen Bruch mit ſeinem Nenner multipliciret; ſo kömmt der Zähler zum Vorſchein.

So wird $\frac{3}{4} \times 4 = 3$; $\frac{5}{6} \times 6 = 5$; $\frac{7}{3} \times 3 = 7$; $\frac{8}{2} \times 2 = 8$.

107. Weil der Quotient durch jede Zahl multipliciret wird, durch welche man das Dividend multipliciret, oder den Theiler dividiret;

So wird auch ein Bruch durch jede Zahl multipliciret, durch welche man ſeinen Zähler multipliciret, oder ſeinen Nenner dividiret.

Daher iſt $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4}$ oder $= \frac{3}{2}$

$\frac{8}{12} \times 3 = \frac{24}{12}$ oder $= \frac{8}{4}$

$\frac{5}{21} \times 7 = \frac{35}{21}$ oder $= \frac{5}{3}$

$\frac{a}{bc} \times c = \frac{ac}{bc}$ oder $= \frac{a}{b}$.

108. Weil der Quotient durch jede Zahl dividiret wird, durch welche man das Dividend dividiret, oder den Theiler multipliciret;

So wird auch ein Bruch durch jede Zahl dividiret, durch welche man ſeinen Zähler dividiret, oder ſeinen Nenner multipliciret.

Daher iſt $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$ oder $\frac{6}{21}$

$\frac{8}{11} : 4 = \frac{2}{11}$ oder $\frac{8}{44}$

$\frac{10}{13} : 5 = \frac{2}{13}$ oder $\frac{10}{65}$

$\frac{ab}{cd} : b = \frac{a}{cd}$ oder $\frac{ab}{bcd}$.

109. Weil der Quotient beſtändig bleibt, wenn man das Dividend und den Theiler durch dieſelbe Zahl multipliciret, oder beede durch dieſelbe dividiret;

So bleibt auch ein Bruch beſtändig, wenn man ſeinen Zähler und Nenner durch dieſelbe Zahl multipliciret, oder beede durch dieſelbe dividiret.

So iſt $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

$= \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{24}{40}$;

$\frac{120}{360} = \frac{12}{36} = \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{acd}{bcd} = \frac{acde}{bcde}$;

$\frac{abc}{bcm} = \frac{ab}{bm} = \frac{a}{m}$;

$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{b + c}{d}$.

110.

110. Weil der Bruch beſtändig bleibt, wenn man ſeinen Zähler und Nenner durch dieſelbe Zahl dividiret;

So kann jeder Bruch, deſſen Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler haben, abgekürzet werden; wenn man beede durch dieſen gemeinen Theiler dividiret.

Da man nun augenblicklich erkennet, ob Zähler und Nenner eines vorgelegten Bruches durch 2, 3, 5 oder 10 theilbar ſind oder nicht; ſo läßt ſich ein Bruch auf das geſchwindeſte abkürzen, wenn man ſeinen Zähler und Nenner durch 10, 5, 3, und 2, ſo lange es angeht, dividiret, ſodann ihren größten gemeinen Theiler ſuchet, und endlich beede noch durch dieſen dividiret.

Dieſemnach findet man

$$\frac{180}{360} = \frac{18}{36} = \frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{36}{72} = \frac{12}{24} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{300}{1050} = \frac{30}{105} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7},$$

$$\frac{1050}{16500} = \frac{105}{1650} = \frac{21}{330} = \frac{7}{110},$$

$$\frac{24882}{72384} = \frac{8294}{24128} = \frac{4147}{12064} \text{ und,}$$

weil 12064 : 4147 = 2
8294

4147 : 3770 = 1
3770

3770 : 377 = 10,
377

00

endlich: $\frac{4147}{12064} = \frac{4147 : 377}{12064 : 377} = \frac{11}{32}$.

111. Weil der Bruch beſtändig bleibt, wenn man ſeinen Zähler und Nenner durch dieſelbe Zahl multipliciret; ſo iſt $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Es läßt ſich alſo jeder Bruch $\frac{a}{b}$ in einen andern $\frac{ac}{bc}$ verwandeln, der eine gegebene Zahl bc zum Nenner hat, wenn nur dieſe Zahl bc ein Vielfaches von dem Nenner b des gegebenen Bruches iſt.

Denn theilen wir, in dieſem Falle die gegebene Zahl bc durch den Nenner b; ſo werden wir allemal einen Quotienten c finden, womit Zähler und Nenner des gegebenen Bruches $\frac{a}{b}$ multiplicirt, den verlangten Bruch $\frac{ac}{bc}$ geben. So läßt ſich der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen andern verwandeln, deſſen Nenner 8, 12, 16, 20, 24, oder was immer für ein Vielfaches 4n von 4 iſt.

Denn weil $\left\{\begin{array}{l} 8 : 4 = 2 \\ 12 : 4 = 3 \\ 16 : 4 = 4 \\ 20 : 4 = 5 \\ 24 : 4 = 6 \\ 4n : 4 = n \end{array}\right\}$ ſo wird $\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{12}{16} \\ \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \\ \frac{3}{4} = \frac{18}{24} \\ \frac{3}{4} = \frac{3n}{4n}. \end{array}\right.$

Und

Und ſo kann der Bruch $\frac{5}{7}$ in einen andern verwandelt werden, deſſen Nenner 14, 21, 28, 35, 42, oder was immer für ein Vielfaches 7n von 7 iſt.

$$\text{Denn weil} \left\{\begin{array}{l} 14 : 7 = 2 \\ 21 : 7 = 3 \\ 28 : 7 = 4 \\ 35 : 7 = 5 \\ 42 : 7 = 6 \\ 7n : 7 = n \end{array}\right\} \text{ſo wird} \left\{\begin{array}{l} \frac{5}{7} = \frac{10}{14} \\ \frac{5}{7} = \frac{15}{21} \\ \frac{5}{7} = \frac{20}{28} \\ \frac{5}{7} = \frac{25}{35} \\ \frac{5}{7} = \frac{30}{42} \\ \frac{5}{7} = \frac{5n}{7n}. \end{array}\right.$$

Ebenſo können auch mehrere Brüche in andere verwandelt werden, die alle eine gegebene Zahl zum Nenner haben, wenn nur dieſe gegebene Zahl durch jeden Nenner der gegebenen Brüche theilbar iſt. So können dieſe Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{10}$ in andere verwandelt werden, die alle die Zahl 60 zum Nenner haben.

$$\text{Denn weil} \left\{\begin{array}{l} 60 : 2 = 30 \\ 60 : 3 = 20 \\ 60 : 4 = 15 \\ 60 : 5 = 12 \\ 60 : 6 = 10 \\ 60 : 10 = 6 \end{array}\right\} \text{ſo wird} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{30}{60} \\ \frac{2}{3} = \frac{40}{60} \\ \frac{3}{4} = \frac{45}{60} \\ \frac{4}{5} = \frac{48}{60} \\ \frac{5}{6} = \frac{50}{60} \\ \frac{3}{10} = \frac{18}{60}. \end{array}\right.$$

Man findet alſo ganz geſchwind den Zähler eines jeden aus den verlangten Brüchen, wenn man die gegebene Zahl 60 durch den Nenner eines jeden aus den gegebenen Brüchen dividiret, und den Quotienten durch den Zähler ebendeſſelben wieder multipliciret, und z. B. im gegenwärtigen Falle ſagt:

für $\frac{1}{2}$, $60 : 2 = 30$, und $1 \times 30 = 30$
für $\frac{2}{3}$, $60 : 3 = 20$, und $2 \times 20 = 40$

für $\frac{3}{4}$, 60 : 4 = 15, und 3 × 15 = 45
für $\frac{4}{5}$, 60 : 5 = 12, und 4 × 12 = 48
für $\frac{5}{6}$, 60 : 6 = 10, und 5 × 10 = 50
für $\frac{3}{10}$, 60 : 10 = 6, und 3 × 6 = 18.

Wenn alſo mehrere Brüche unter gleiche Nenner zu bringen ſind; ſo kommt es nur darauf an, daß man eine Zahl ausfindig mache, die ſich durch jeden Nenner der gegebenen Brüche theilen läßt, und ſodann wie zuvor verfahre. Hierzu wird uns das Product aus allen Nennern der gegebenen Brüche allemal dienen können.

Denn ſind allgemein die gegebenen Brüche $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{p}{q}$; $\frac{m}{n}$; ſo iſt das Product aus allen Nennern bdqn gewiß durch jeden Nenner b, d, q und n theilbar.

Sind die gegebenen Brüche $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{m}{bn}$; $\frac{p}{qd}$; ſo läßt ſich nicht nur bbddqn, ſondern auch bdnq durch jeden Nenner b, d, bn, qd theilen.

Wenn man daher jene Nenner b und d, die ſchon in andern bn und qd enthalten ſind, wegläßt; ſo bleibt das Product aus allen übrigen bdnq noch immer durch jeden theilbar.

Sind die gegebenen Brüche $\frac{a}{bd}$; $\frac{c}{de}$; $\frac{m}{bfe}$; $\frac{p}{nfe}$; ſo läßt ſich nicht nur bbddeeeffn, ſondern auch bdefn durch jeden Nenner bd, de, bfe und nfe theilen. Es kann alſo der Nenner bd weggelaſſen werden, weil der eine Factor davon b in dem Nenner bfe, und der andere d in dem Nenner de enthalten iſt; ferner kann von dem Nenner de der Factor e, der ſchon in dem Nenner bfe enthalten iſt, wegbleiben; und von dem Nenner bef

endlich kann noch der Factor ſe, der ſchon in dem Nenner nſe enthalten iſt, weggelaſſen werden.

Man erhält alſo die kleinſte Zahl, die ſich durch jeden Nenner der gegebenen Brüche theilen läßt, wenn man alle die kleinern Nenner, und alle jene Factoren der kleinern Nenner, welche in den größern enthalten ſind, wegläßt; und ſodann jene Nenner und Factoren der Nenner, die übrig gebliebèn ſind, miteinander multipliciret.

Es ſeyen die gegebenen Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; ſo iſt 2 in 4, 3 in 6, und der eine Factor von 4, 2 auch in 6 enthalten; alſo $2 \times 5 \times 6 = 60$ der kleinſte gemeine Nenner, den dieſe Brüche haben können; verfährt man daher wie oben, ſo werden $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; unter gleiche Nenner gebracht, gleich $\frac{30}{60}$; $\frac{40}{60}$; $\frac{45}{60}$; $\frac{48}{60}$; $\frac{50}{60}$.

Es ſeyen die gegebenen Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{12}$; ſo iſt 2 in 4, 3 in 6, 4 in 8, 6 in 12, und der eine Factor von 8, 4 auch in 12 enthalten; alſo $2 \times 12 = 24$ der kleinſte gemeine Nenner derſelben.

Daher werden

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{12}$; unter gleiche Nenner gebracht,

gleich $\frac{12}{24}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{18}{24}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{21}{24}$; $\frac{6}{24}$.

Es ſeyen die gegebenen Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{15}$; ſo iſt 2 in 6, 3 in 6, 5 in 10, von 6 ein Factor 3 in 15, und der andere 2 in 10, endlich von 10 ein Factor 5 in 15 enthalten; alſo $2 \times 15 = 30$ der kleinſte gemeine Nenner derſelben.

Daher werden

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{15}$; unter gleiche Nenner gebracht,

gleich $\frac{15}{30}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{6}{30}$; $\frac{25}{30}$; $\frac{9}{30}$; $\frac{14}{30}$.

Es ſeyen die gegebenen Brüche $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{13}{48}$, ſo iſt 12 in 24, 16 in 48, und 24 auch in 48 enthalten; alſo 48 der kleinſte gemeine Nenner derſelben.

Daher werden $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{13}{48}$; unter gleiche Nenner gebracht,

gleich $\frac{20}{48}$; $\frac{9}{48}$; $\frac{22}{48}$; $\frac{13}{48}$.

Es ſeyen die gegebenen Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7}$, ſo iſt keiner von den Nennern in einem andern enthalten; alſo $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ der kleinſte gemeine Nenner derſelben.

Daher werden $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{7}$, unter gleiche Nenner gebracht

$$\text{gleich } \frac{105}{210}, \frac{70}{210}, \frac{168}{210}, \frac{90}{210}.$$

Ferner werden dieſe Brüche $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{m}{bn}; \frac{p}{dq}$; unter gleiche Nenner gebracht,

$$\text{gleich } \frac{adnq}{bdnq}; \frac{bcnq}{bdnq}; \frac{mdq}{bdnq}; \frac{pbn}{bdnq};$$

$$\text{und } \frac{a}{bd}; \frac{c}{de}; \frac{m}{bfe}; \frac{p}{nfe};$$

$$\text{gleich } \frac{aefn}{bdefn}, \frac{bcfn}{bdefn}, \frac{mdn}{bdefn}, \frac{pbd}{bdefn}.$$

112. Da ein Bruch $\frac{a}{b}$ nichts anders anzeigt, als den Quotienten, den man erhält, wenn man den Zähler a durch den Nenner b theilet; und da jede Zahl durch ſich ſelbſt dividirt 1 zum Quotienten giebt; ſo wird jeder Bruch, deſſen Zähler und Nenner einander gleich ſind, allemal gleich 1.

So iſt $\frac{3}{3} = 1$; $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{10}{10} = 1$; $\frac{c}{c} = 1$.

Daher kann anſtatt 1 jedesmal was immer für ein Bruch geſetzet werden, deſſen Zähler und Nenner einander gleich ſind.

Iſt aber der Zähler größer als der Nenner; ſo giebt jener durch dieſen dividirt, eine ganze, oder aber eine aus einer ganzen und einer gebrochenen zuſammengeſetzte Zahl zum Quotienten.

So iſt 1tens

$$\frac{6}{2} = 3;\ \frac{10}{5} = 2;\ \frac{21}{3} = 7;\ \frac{cd}{d} = c.$$

und 2tens

$$\frac{7}{4} = 1\ \frac{3}{4};\ \frac{8}{5} = 1\ \frac{3}{5};\ \frac{11}{2} = 5\ \frac{1}{2};$$

$$\frac{cd + n}{d} = c + \frac{n}{d}.$$

Daher kann anſtatt jeder Zahl c allemal wieder ein Bruch $\frac{cd}{d}$ geſetzet werden, deſſen Nenner eine beliebige Zahl d, und deſſen Zähler cd ein Product aus dieſem Nenner in jene ganze Zahl iſt.

So iſt

$$3 = \frac{3 \times 2}{2} = \frac{6}{2} \qquad 7 = \frac{7 \times 3}{3} = \frac{21}{3}$$

$$2 = \frac{2 \times 5}{5} = \frac{10}{5} \qquad 9 = \frac{9 \times 100}{100} = \frac{900}{100}.$$

Eben-

Ebenſo kann jede aus einer ganzen und einer gebrochenen zuſammengeſetzte Zahl $c + \frac{n}{d}$ jedesmal wieder in einen Bruch $\frac{cd + n}{d}$ verwandelt werden, welcher mit dem angehängten Bruche $\frac{n}{d}$ einen gemeinen Nenner d hat, und deſſen Zähler erhalten wird, wenn man die ganze Zahl c durch ebendieſen Nenner d multipliciret, und zu dem Producte cd noch den Zähler n des angehängten Bruches addiret.

So iſt $1\frac{3}{4} = \frac{1 \times 4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$

$$1\frac{3}{5} = \frac{1 \times 5 + 3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$5\frac{1}{2} = \frac{5 \times 2 + 1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$4\frac{2}{3} = \frac{4 \times 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

Hieraus iſt man im Stande jede ganze Zahl, und auch jede aus einer ganzen und einer gebrochenen zuſammengeſetzte Zahl mit andern Brüchen unter gleiche Nenner zu bringen.

Es ſeyen die gegebenen Zahlen a; $c + \frac{n}{d}$; $\frac{b}{md}$; $\frac{p}{qm}$; ſo iſt d in md, und der eine Factor m von dem Nenner md in qm enthalten; alſo $d \times qm = dqm$ der kleinſte gemeine Nenner derſelben.

Daher werden

$$a; \frac{cd+n}{d}; \frac{b}{md}; \frac{p}{qm};$$ unter gleiche Nenner gebracht,

$$= \frac{adqm}{dqm}; \frac{cdqm+nqm}{dqm}; \frac{bq}{dqm}; \frac{pd}{dqm}.$$

Es ſeyen die gegebenen Zahlen $3; 4\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{12};$ ſo iſt 3 in 6, 4 in 12, und auch 6 in 12 enthalten; alſo 12 der kleinſte gemeine Nenner.

Daher werden

$$3; \frac{14}{3}; \frac{9}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{12};$$ unter gleiche Nenner gebracht,

gleich $\frac{36}{12}; \frac{56}{12}; \frac{27}{12}; \frac{10}{12}; \frac{7}{12}.$

Iſt endlich der Zähler eines jeden Bruches kleiner als deſſelben Nenner, ſo kann dieſer nie ein ganzesmal in jenem enthalten ſeyn; alſo iſt ein ſolcher Bruch allemal kleiner als 1.

Dergleichen Brüche werden **eigentliche**, jene aber, welche gleich oder größer als 1 ſind, **uneigentliche** Brüche genennet.

113. Da der Zähler eines eigentlichen Bruches ſich nimmermehr durch den Nenner deſſelben theilen läßt; ſo kann ein ſolcher Bruch auch nie deutlicher ausgedrücket werden, ſo lange der Zähler eine ungenannte Zahl bleibt: iſt aber der Zähler deſſelben eine genannte Zahl, ſo läßt er ſich in Theile zerlegen, und durch das wirkliche Dividiren oft in eine ganze Zahl verwandeln, die einen ſolchen Theil zur Einheit hat.

So weil 1 fl. ſoviel iſt als 60 kr.; ſo iſt

$$\frac{1}{3}\text{fl. oder } \frac{1\,\text{fl.}}{3} = \frac{60\,\text{kr.}}{3} = 20\ \text{kr.}$$

$$\frac{2}{5}\text{fl. oder } \frac{2\,\text{fl.}}{5} = \frac{120\,\text{kr.}}{5} = 24\ \text{kr.}$$

$$\frac{3}{10}\text{fl. oder } \frac{3\,\text{fl.}}{10} = \frac{180\,\text{kr.}}{10} = 18\ \text{kr.}$$

$$\frac{5}{8}\text{fl. oder } \frac{5\,\text{fl.}}{8} = \frac{300\,\text{kr.}}{8} = 37\frac{1}{2}\ \text{kr.}$$

$$\frac{2}{7}\text{fl. oder } \frac{2\,\text{fl.}}{7} = \frac{120\,\text{kr.}}{7} = 17\frac{1}{7}\ \text{kr.}$$

$$\frac{a}{10}\text{fl. oder } \frac{a\,\text{fl.}}{10} = \frac{60a\,\text{kr.}}{10} = 6a\ \text{kr.}$$

Ferner weil 1 Pfund ſoviel iſt als 32 Loth; ſo iſt

$$\frac{5}{8}\text{Pf. oder } \frac{5\,\text{Pf.}}{8} = \frac{160\,\text{Lt.}}{8} = 20\,\text{Lt.}$$

$$\frac{5}{6}\text{Pf. oder } \frac{5\,\text{Pf.}}{6} = \frac{160\,\text{Lt.}}{6} = 26\frac{2}{3}\,\text{Lt.}$$

$$\frac{a}{16}\text{Pf. oder } \frac{a\,\text{Pf.}}{16} = \frac{32a\,\text{Lt.}}{16} = 2a\,\text{Lt.}$$

Endlich weil 1 Schuh ſoviel iſt als 12 Zoll; ſo iſt

$$\frac{1}{2}\text{Sch. oder } \frac{1\,\text{Sch.}}{2} = \frac{12\,\text{Zoll}}{2} = 6\ \text{Zoll},$$

$$\frac{2}{3}\text{Sch. oder } \frac{2\,\text{Sch.}}{3} = \frac{24\,\text{Zoll}}{3} = 8\ \text{Zoll},$$

$\frac{3}{4}$ Sch. oder $\frac{3\text{ Sch.}}{4} = \frac{36\text{ Zoll}}{4} = 9$ Zoll,

$\frac{4}{5}$ Sch. oder $\frac{4\text{ Sch.}}{5} = \frac{48\text{ Zoll}}{5} = 9\frac{3}{5}$ Zoll,

$\frac{a}{6}$ Sch. oder $\frac{a\text{ Sch.}}{6} = \frac{12a\text{ Zoll}}{6} = 2a$ Zoll.

114. Da $\frac{1}{b} \times a = \frac{a}{b}$; ſo erhält man auch den Werth eines Bruches $\frac{a}{b}$, wenn man die Einheit durch den Nenner b theilet, und den Quotienten $\frac{1}{b}$ wieder mit dem Zähler a multipliciret.

Dieſemnach wird

$$\frac{2}{5}\text{ fl.} = \frac{1\text{ fl.}}{5}\times 2 = \frac{60\text{ kr.}}{5}\times 2 = \overset{\text{kr.}}{12} \times 2 = 24\text{ kr.}$$

$$\frac{3}{10}\text{ fl.} = \frac{1\text{ fl.}}{10}\times 3 = \frac{60\text{ kr.}}{10}\times 3 = \overset{\text{kr.}}{6} \times 3 = 18\text{ kr.}$$

$$\frac{7}{20}\text{ fl.} = \frac{1\text{ fl.}}{20}\times 7 = \frac{60\text{ kr.}}{20}\times 7 = \overset{\text{kr.}}{3} \times 7 = 21\text{ kr.}$$

$$\frac{a}{30}\text{ fl.} = \frac{1\text{ fl.}}{30}\times a = \frac{60\text{ kr.}}{30}\times a = \overset{\text{kr.}}{2} \times a = 2a\text{ kr.}$$

$$\frac{3}{4}\text{ Pf.} = \frac{1\text{ Pf.}}{4}\times 3 = \frac{32\text{ Lt}}{4}\times 3 = \overset{\text{Loth}}{8} \times 3 = 24\text{ Lt.}$$

$$\frac{5}{8}\text{ Pf.} = \frac{1\text{ Pf.}}{8}\times 5 = \frac{32\text{ Lt.}}{8}\times 5 = \overset{\text{Loth}}{4} \times 5 = 20\text{ Lt.}$$

$$\frac{a}{16}\text{ Pf.} = \frac{1\text{ Pf.}}{16}\times a = \frac{32\text{ Lt.}}{16}\times a = \overset{\text{Loth}}{2} \times a = 2a\text{ Lt.}$$

$\frac{2}{3}$ Sch.

$\frac{2}{3}$ Sch. $= \frac{1 \text{ Sch.}}{3} \times 2 = \frac{12 \text{ Zoll}}{3} \times 2 = 4 \text{ Zoll} \times 2 = 8 \text{ Zoll},$

$\frac{3}{4}$ Sch. $= \frac{1 \text{ Sch.}}{4} \times 3 = \frac{12 \text{ Zoll}}{4} \times 3 = 3 \text{ Zoll} \times 3 = 9 \text{ Zoll},$

$\frac{a}{6}$ Sch. $= \frac{1 \text{ Sch.}}{6} \times a = \frac{12 \text{ Zoll}}{6} \times a = 2 \text{ Zoll} \times a = 2a \text{ Zoll}.$

Weil $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a$;

ſo iſt auch ein Bruch nichts anders, als ein oder mehrere gleiche Theilchen der Einheit.

Der Nenner zeiget an; **aus was für Theilchen** der Einheit, und der Zähler **aus wieviel derſelben** ein Bruch beſtehe: jener benennet die Theilchen der Einheit, und dieſer zählet jene, die den Bruch ausmachen, ſo zu ſagen, vor.

Auch aus dieſem Begriffe können die ſchon oben erkannten Eigenſchaften der Brüche, wie folgt, hergeleitet werden.

Der Nenner zeiget an, in wieviel gleiche Theilchen die Einheit einzutheilen iſt, und der Zähler, wieviel derſelben zu nehmen ſind, daß man den Werth des Bruches erhalte. Nachdem daher **1tens** der Zähler größer, gleich oder kleiner als der Nenner iſt; ſo beſteht der Bruch aus mehr, ebenſoviel. oder weniger gleichen Theilchen, als die Einheit enthält, und iſt folglich größer, gleich oder kleiner als 1.

So iſt $\frac{4}{4}$ gleich 1; $\frac{5}{4}$ größer als 1; und $\frac{3}{4}$ kleiner als 1.

Wenn wir **2tens** den Zähler a eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ 2mal, 3mal, oder cmal nehmen; ſo wird der neue Bruch auch 2mal, 3mal oder cmal ſoviel bte Theile in

ſich

ſich enthalten, als $\frac{a}{b}$ enthält, alſo das 2fache, 3fache oder cfache von $\frac{a}{b}$ ſeyn.

Oder wenn wir den Nenner b eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ durch 2, 3 oder c dividiren; ſo wird dieſer Nenner 2, 3 oder cmal kleiner, alſo jeder Theil der Einheit 2, 3 oder cmal größer, folglich der neue Bruch wieder das 2, 3 oder cfache von $\frac{a}{b}$.

Daher wird ein Bruch durch jede Zahl multipliciret, durch welche man ſeinen Zähler multipliciret, oder aber ſeinen Nenner dividiret.

Wenn wir 3tens den Zähler a eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ durch 2, 3 oder c dividiren; ſo wird die Anzahl der bten Theile, woraus der neue Bruch beſteht, 2, 3 oder cmal in der Anzahl der bten Theile, woraus der Bruch $\frac{a}{b}$ beſteht, enthalten, alſo jener nur der 2te, 3te oder cte Theil von dieſem ſeyn.

Oder wenn wir den Nenner b eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ 2mal, 3mal oder cmal nehmen; ſo wird jeder Theil der Einheit, woraus der neue Bruch beſteht, 2mal, 3mal oder cmal kleiner, als jeder Theil der Einheit, woraus der Bruch $\frac{a}{b}$ beſteht, folglich jener wieder nur der 2te, 3te oder cte Theil von dieſem ſeyn.

Daher wird ein Bruch durch jede Zahl dividiret, durch welche man ſeinen Zähler dividiret, oder aber ſeinen Nenner multipliciret.

Wenn

Wenn man 4tens den Zähler a und den Nenner b eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ durch c multipliciret; ſo wird jeder Theil der Einheit, woraus der neue Bruch $\frac{ac}{bc}$ beſteht, cmal kleiner als jeder Theil der Einheit, woraus der Bruch $\frac{a}{b}$ beſteht: jener hingegen enthält wieder cmal ſoviel Theilchen der Einheit als dieſer enthält; alſo bleibt $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Und wenn man den Zähler a und den Nenner b eines jeden Bruches $\frac{a}{b}$ durch c dividiret; ſo wird jeder Theil der Einheit, woraus der neue Bruch $\frac{a:c}{b:c}$ beſteht, cmal ſo groß als jeder Theil der Einheit, woraus der Bruch $\frac{a}{b}$ beſteht: hingegen enthält jener wieder cmal weniger Theilchen als dieſer; alſo bleibt abermal $\frac{a:c}{b:c} = \frac{a}{b}$.

Daher bleibt der Bruch beſtändig, wenn man ſeinen Zähler und Nenner durch ebendieſelbe Zahl multipliciret, oder beede durch ebendieſelbe dividiret.

Hieraus fließet wieder wie oben, ſowohl die Methode Brüche abzukürzen, als jene, Brüche unter gleiche Nenner zu bringen.

Endlich weil $\frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a$;

ſo giebt jeder Bruch durch ſeinen Nenner multipliciret, ſeinen Zähler zum Product.

115. Der Nenner benennet die Theilchen der Einheit, woraus der Bruch beſteht, indem er anzeiget, daß ſol-

ſolche 2te, 3te, 4te, 5te, 6te oder bte Theile derſelben ſind. Es enthalten alſo Brüche, die gleiche Nenner haben, lauter gleiche Theile der Einheit; ſo beſtehen $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ aus lauter 8ten Theilchen, und $\frac{1}{b}$, $\frac{3}{b}$, $\frac{4}{b}$, $\frac{c}{b}$ aus lauter bten Theilchen derſelben.

Ferner enthält jeder von den Brüchen, die einen gemeinen Nenner b haben, ſoviel bte Theile der Einheit, als deſſen Zähler Einheiten enthält.

Man bekommt daher die Summe oder den Unterſcheid von ſolchen Brüchen, wenn man die Summe oder den Unterſcheid ihrer Zähler durch den gemeinen Nenner dividiret.

So iſt $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$,

$$\frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11},$$

$$\frac{3}{b} + \frac{7}{b} = \frac{10}{b},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},$$

$$\frac{3}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{3}{7},$$

$$\frac{2}{17} - \frac{11}{17} = -\frac{9}{17},$$

$$\frac{9}{b} - \frac{5}{b} = \frac{4}{b},$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b},$$

116. Iſt die Summe oder der Unterſcheid von Brüchen zu finden, die keine gleichen Nenner haben; ſo kann man ſolche unter einen gemeinen Nenner bringen, und wie zuvor verfahren. So iſt

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\ \frac{5}{12};$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\ \frac{11}{20};$$

$$\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{24}{30} + \frac{25}{30} = \frac{49}{30} = 1\ \frac{19}{30};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd};$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20}$$
$$+ \frac{10}{20} + \frac{6}{20} = \frac{39}{20} = 1\ \frac{19}{20};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{14}{28} + \frac{21}{28} + \frac{20}{28}$$
$$= \frac{55}{28} = 1\ \frac{27}{28};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{9}{10} + \frac{13}{15}$$
$$= \frac{15}{30} + \frac{20}{30} + \frac{24}{30} + \frac{25}{30} + \frac{27}{30} + \frac{26}{30}$$
$$= \frac{137}{30} = 4\ \frac{17}{30};$$

$\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n} = \frac{adn}{bdn} + \frac{bcn}{bdn} + \frac{bdm}{bdn}$$

$$= \frac{adn+bcn+bdm}{bdn}.$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12};$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20};$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{25}{30} - \frac{24}{30} = \frac{1}{30};$$

$$\frac{3}{7} - \frac{11}{14} = \frac{6}{14} - \frac{11}{14} = -\frac{5}{14};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{6}{7} = \frac{14}{21} - \frac{18}{21} = -\frac{4}{21};$$

$$\frac{3}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3};$$

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{12} = \frac{21}{24} - \frac{6}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8};$$

$$\frac{3}{12} - \frac{7}{8} = \frac{6}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{15}{24} = -\frac{5}{8};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Weil jede ganze Zahl ſich allemal in einen Bruch von einem gegebenen Nenner verwandeln läßt; ſo können auch ganze Zahlen und Brüche nach voriger Methode addiret oder voneinander abgezogen werden.

So iſt $3 + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3};$

$$5 + \frac{5}{8} = \frac{40}{8} + \frac{5}{8} = \frac{45}{8};$$

$$6 - \frac{3}{4} = \frac{24}{4} - \frac{3}{4} = \frac{21}{4};$$

$$\frac{3}{5} - 2 = \frac{3}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{7}{5};$$

$$\frac{2}{3} - 4 = \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{10}{3};$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c};$$

$$a + \frac{b+c}{m+n} = \frac{am+an}{m+n} + \frac{b+c}{m+n} = \frac{am+an+b+c}{m+n};$$

$$a + \frac{ac+bc}{c+b} = \frac{ac+ab}{c+b} + \frac{ac+bc}{c+b} = \frac{2ac+ab+bc}{c+b};$$

$$a - \frac{ab}{b+c} = \frac{ab+ac}{b+c} - \frac{ab}{b+c} = \frac{ab+ac-ab}{b+c} = \frac{ac}{b+c}.$$

117. Es ſey der Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ zu multipliciren. Weil das Product unverändert bleibt, wenn man einen ſeiner Factoren durch was immer für eine Zahl dividirt, und den andern durch dieſelbe multiplicirt;

ſo können wir dieſe zween Factoren $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in zween andere verwandeln, die miteinander multiplicirt das nämliche Product geben, und deren einer eine ganze Zahl iſt; wenn wir den erſten $\frac{a}{b}$ mit b multipliciren, und den zweyten $\frac{c}{d}$ mit b dividiren, oder aber den zweyten $\frac{c}{d}$ durch d multipliciren und den erſten $\frac{a}{b}$ durch d dividiren.

Denn ſo wird $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \times \frac{c}{bd}$, oder

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} \times c.$$

Da nun $a \times \frac{c}{bd}$ oder $\frac{a}{bd} \times c = \frac{ac}{bd}$; ſo iſt auch

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Oder weil der Bruch $\frac{a}{b}$ durch jede Zahl multipliciret wird, durch welche man den Zähler a multipliciret; ſo wird $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times \frac{c}{d}}{b} = \frac{\frac{ac}{d}}{b}$

$$= \frac{ac}{d} : b = \frac{ac}{bd}$$

Oder weil $m \times \frac{c}{d} = \frac{mc}{d}$; ſo wird jede Zahl m durch einen Bruch $\frac{c}{d}$ multipliciret, wenn man dieſe

Zahl

Zahl m mit dem Zähler c multipliciret, und das Product cm wieder durch den Nenner d dividiret. Wir werden daher auch die Zahl $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ multipliciren, wenn wir dieſe Zahl $\frac{a}{b}$ mit dem Zähler c multipliciren, und das Product $\frac{ac}{b}$ wieder durch den Nenner d dividiren.

Daher giebt wieder $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Da nun $\frac{ac}{bd} = \frac{a \times c}{b \times d}$; ſo erhält man das Product zweener Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, wenn man das Product ihrer Zähler durch das Product ihrer Nenner dividiret.

So iſt $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{3a}{5b} \times \frac{2c}{8d} = \frac{6ac}{40bd} = \frac{3ac}{20bd}$$

Ferner iſt $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{p}{q} = \frac{ac}{bd} \times \frac{p}{q}$

$$= \frac{a \times c \times p}{b \times d \times q}$$

H 2 und

und $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{acp}{bdq} \times \frac{m}{n}$

$$= \frac{acpm}{bdqn} = \frac{a \times c \times p \times m}{b \times d \times q \times n}.$$

Daher erhält man das Product von ſoviel Brüchen als man will, wenn man das Product aus allen ihren Zählern durch das Product aus allen ihren Nennern dividiret.

So iſt $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{3}{6} \times \frac{6}{8} \times \frac{8}{11} \times \frac{9}{10} \times \frac{13}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{3 \times 6 \times 8 \times 9 \times 13 \times 11}{6 \times 8 \times 11 \times 10 \times 3 \times 5} = \frac{9 \times 13}{10 \times 5} = \frac{117}{50} = 2\,\frac{17}{50}.$$

118. Man erhält $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{d}$ Theilchen von jeder Zahl a, wenn man dieſe Zahl a durch 3, 4, 5 oder d theilet.

Alſo erhält man $\frac{2}{d}$, $\frac{3}{d}$, $\frac{4}{d}$ oder $\frac{c}{d}$ Theilchen von jeder Zahl a, wenn man dieſe Zahl a durch d theilet, und den Quotienten wieder 2, 3, 4 oder cmal nimmt.

So

So iſt $\frac{1}{3}$ der Zahl $a = \frac{a}{3}$

$\frac{1}{4}$ der Zahl $a = \frac{a}{4}$

$\frac{1}{5}$ der Zahl $a = \frac{a}{5}$

$\frac{1}{d}$ der Zahl $a = \frac{a}{d}$

$\frac{2}{d}$ der Zahl $a = \frac{2a}{d}$

$\frac{3}{d}$ der Zahl $a = \frac{3a}{d}$

$\frac{4}{d}$ der Zahl $a = \frac{4a}{d}$ und

$\frac{c}{d}$ der Zahl $a = \frac{ca}{d}$.

Ebenſo iſt $\frac{1}{3}$ der Zahl $\frac{m}{n} = \frac{m}{3n}$

$\frac{1}{4}$ der Zahl $\frac{m}{n} = \frac{m}{4n}$

$\frac{1}{5}$ der Zahl $\frac{m}{n} = \frac{m}{5n}$

$\frac{1}{d}$ der Zahl $\frac{m}{n} = \frac{m}{dn}$

$\frac{2}{d}$ der Zahl $\frac{m}{n} = \frac{2m}{dn}$

$$\frac{3}{d} \text{ der Zahl } \frac{m}{n} = \frac{3m}{dn}$$

$$\frac{4}{d} \text{ der Zahl } \frac{m}{n} = \frac{4m}{dn}$$

$$\frac{c}{d} \text{ der Zahl } \frac{m}{n} = \frac{cm}{dn}.$$

Da nun $\frac{ca}{d}$ ſoviel iſt, als $a \times \frac{c}{d}$, und

$\frac{cm}{dn}$ ſoviel, als $\frac{m}{n} \times \frac{c}{d}$;

ſo heißt die Redensart: **man ſoll $\frac{c}{d}$ Theilchen von der Zahl a oder von der Zahl $\frac{m}{n}$ angeben,** ſoviel als, man ſoll a oder $\frac{m}{n}$ mit $\frac{c}{d}$ multipliciren.

Es ſeyen von $\frac{2}{3}$ erſtlich $\frac{3}{4}$, ſodann von dem was heraus kömmt $\frac{4}{5}$, und endlich von dem was man wiederum erhält, $\frac{5}{6}$ anzugeben; ſo bekömmt man am Ende

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

119. Es ſey a durch $\frac{c}{d}$ zu dividiren.

Weil

Weil der Quotient unverändert bleibt, wenn man das Dividend a und den Theiler $\frac{c}{d}$ durch die nämliche Zahl d multipliciret; ſo wird

$$a : \frac{c}{d} = ad : c = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}$$

Oder a : $\frac{c}{d}$ iſt gewiß gleich einem Bruche, deſſen Zähler a und deſſen Nenner $\frac{c}{d}$ iſt; alſo wird

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{\frac{c}{d}}$$

Multiplicirt man nun den Zähler a, und den Nenner $\frac{c}{d}$ durch die nämliche Zahl d; ſo bleibt der Bruch beſtändig. Daher wird ferner

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}$$

Oder jeder dte Theil der Einheit iſt dmal in jeder Einheit, alſo in a Einheiten admal enthalten; folglich werden auch c ſolche dte Theile ſo oft in a enthalten ſeyn, als c in ad enthalten iſt, alſo $\frac{ad}{c}$mal. Daher wird auch aus dieſem Grunde

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}.$$

Man dividirt alſo jede Zahl a durch einen Bruch $\frac{c}{d}$, wenn man das Dividend a mit verkehrtem Theiler $\frac{d}{c}$ multiplicirет.

So iſt
$$3 : \frac{2}{3} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2},$$
$$5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\tfrac{2}{3},$$
$$4 : \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1} = 8.$$

Es ſey $\frac{m}{n}$ durch $\frac{c}{d}$ zu dividiren.

Weil der Quotient unverändert bleibt, wenn man das Dividend $\frac{m}{n}$ und den Theiler $\frac{c}{d}$ durch die nämliche Zahl d multipliciret; ſo wird
$$\frac{m}{n} : \frac{c}{d} = \frac{dm}{n} : c = \frac{dm}{cn} = \frac{m}{n} \times \frac{d}{c}$$

Oder weil ein Bruch $\frac{m}{n}$ durch jede Zahl $\frac{c}{d}$ dividiret wird, durch welche man ſeinen Nenner multipliciret; ſo wird
$$\frac{m}{n} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n \times \frac{c}{d}} = \frac{m}{\frac{cn}{d}}.$$

Multipliciren wir nun den Zähler m und den Nenner $\frac{cn}{d}$ durch die nämliche Zahl d; ſo wird ferner

$\frac{m}{n}$

$$\frac{m}{n} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n\times\frac{c}{d}} = \frac{m}{\frac{cn}{d}} = \frac{dm}{cn} = \frac{m}{n} \times \frac{d}{c}.$$

Oder weil $a : \frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c}$; ſo wird auch, wenn man $\frac{m}{n}$ anſtatt a ſetzt, $\frac{m}{n} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \times \frac{d}{c}$.

Es wird daher jeder Bruch $\frac{m}{n}$ durch einen andern $\frac{c}{d}$ dividiret, wenn man das Dividend $\frac{m}{n}$ mit verkehrtem Theiler $\frac{d}{c}$ multipliciret.

So iſt $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{a}{b} = \frac{7}{8} \times \frac{b}{a} = \frac{7b}{8a}$$

120. Weil ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch jede Zahl c dividiret wird, durch welche man ſeinen Nenner multipliciret; ſo wird der Bruch, deſſen Zähler immer derſelbe bleibt, kleiner, wie ſein Nenner gröſſer wird.

Es bleibe nun der Zähler eines Bruches beſtändig, und der Nenner deſſelben wachſe ohne Ende fort, und werde gröſſer als jede in ſich beſtimmte Gröſſe; ſo wird der Bruch

Bruch auch ohne Ende abnehmen und kleiner werden als jede in ſich beſtimmte Größe.

Was immer größer iſt als jede in ſich beſtimmte Größe, heißt unendlich groß, und was kleiner iſt als jede in ſich beſtimmte Größe, wird unendlich klein genennet.

Wenn alſo der Nenner eines Bruches, deſſen Zähler eine gegebene Zahl a iſt, unendlich groß wird; ſo wird der Bruch unendlich klein.

Ein unendlich Großes drückt man durch dieſes Zeichen (∞) aus. Es iſt alſo $\frac{a}{\infty}$ unendlich klein.

Eine Größe mag immer ſo klein ſeyn als ſie will; ſo iſt ſie doch allemal ebendas, was ſie iſt; alſo in ſich beſtimmt, und noch nicht unendlich klein.

Es muß alſo eine unendlich kleine Größe wirklich gleich o ſeyn.

Weil ein Bruch durch jede Zahl multipliciret wird, durch welche man ſeinen Nenner dividiret; ſo wächſt der Bruch, wie ſein Nenner abnimmt.

Nimmt alſo der Nenner ohne Ende ab, und wird unendlich klein, oder gleich o; ſo wird auch der Bruch ohne Ende fortwachſen und unendlich groß werden.

Daher iſt jede Größe durch o getheilt unendlich groß.

Es iſt alſo $\frac{a}{\infty} = 0$, und $\frac{a}{0} = \infty$; a mag was immer für eine beſtimmte Zahl bedeuten.

Von den zehntheiligen Brüchen.

121.

In dem angenommenen Zahlgebäude wachſen die Werthe der Ziffern, von der Rechten zur Linken gezählt, in jeder Stelle um das Zehnfache; und nehmen folglich von der Linken zur Rechten wieder in jeder Stelle um das Zehnfache ab. Es iſt nämlich der Werth jeder Ziffer in

jeder Stelle immer nur der 10te Theil von dem Werthe, den ebendieſelbe in der nächſthöhern Stelle hat.

So iſt in dieſer Zahl (3333), $\frac{3000}{10} = 300$; $\frac{300}{10} = 30$; und $\frac{30}{10} = 3$.

Will man die Stelle der Einheiten von den andern dadurch unterſcheiden, daß man derſelben einen Punct nachſchreibt, und die Ziffern noch ferner zur Rechten fortſetzen, wie z. B. in dieſer Zahl 3. 3333; ſo wird man den Werth jeder Stelle nach der Einheit finden, wenn man den Werth der nächſthöhern immer wieder durch 10 dividiret. Da nun die Ziffer vor dem Punkte, wie vorausgeſetzet, Einheiten bedeutet; ſo wird die erſte Ziffer nach der Einheit 10te Theile; die zwote 100te Theile; die dritte 1000te Theile; und die vierte nur 10000te Theile derſelben bedeuten.

Alſo $3.\,3333 = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$

$$21.\,3456 = 21 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000}$$

$$340.\,5060203 = 340 + \frac{5}{10} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{100000} + \frac{3}{10000000}$$

$$2.0004506 = 2 + \frac{4}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{6}{10000000}$$

$$0.\,3000502 = \frac{3}{10} + \frac{5}{100000} + \frac{2}{10000000}$$

$$0.00004567 = \frac{4}{100000} + \frac{5}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \frac{7}{100000000}$$

Dieſe Zahlen entſtehen, wenn man Ganze von der Einheit an zur Rechten vorſetzet, und werden zehntheilige Brüche oder auch nur Zehntheilchen genennet.

Wenn man keine Ganzen auszudrücken hat; ſo iſt die Stelle der Einheiten, wie in den zween vorletzten Beyſpielen, mit einer 0 zu bezeichnen.

122. Die Ziffern haben einen doppelten Werth, einen von ihrer Figur, und einen von ihrer Stelle, die immer von der Stelle der Einheiten an zu zählen iſt. Die 0 iſt eine für ſich nichts bedeutende Ziffer. Sie ändert aber den Werth der übrigen bedeutenden Ziffern allemal, aber auch nur alsdann, wenn ſie die Stelle derſelben ändert.

Daher iſt die 0 vor den Ganzen und nach den Zehntheilchen geſetzt von gar keiner Bedeutung, weil dieſe ſowohl als jene immer dieſelbe Stelle behalten, man mag jenen 0 vor und dieſen 0 nachſchreiben ſoviel man will.

So bleibt 3. 4 immer = 03. 40 = 003. 400 = 0003. 4000.

Schreibt man aber eine 0 nach den ganzen Zahlen; ſo rücket ſolche jede aus den bedeutenden Ziffern in eine höhere Stelle vor, und multipliciret ſie folglich durch 10.

So iſt 34 × 10 = 340.

Und ſchreibt man nach der Einheit eine 0 vor die zehntheiligen Ziffern; ſo kömmt jede aus dieſen in eine niedrigere Stelle zu ſtehen, und wird folglich durch 10 dividirt.

So

So iſt 0. 4 : 10 = 0. 04; 0. 4 : 100 = 0. 004; 0. 4 : 1000 = 0. 0004.

123. Wenn man jede Ziffer einer Zahl um eine, zwo, drey oder vier Stellen von der Rechten zur Linken vorrücket; ſo wird die Zahl durch 10, 100, 1000 oder 10000 multiplicirt: und bringt man jede Ziffer einer Zahl um eine, zwo, drey oder vier Stellen zurücke; ſo wird die Zahl durch 10, 100, 1000 oder 10000 dividirt.

Daher multiplicirt oder dividiret man eine Zahl durch 10, 100, 1000 oder 10000, wenn man das Zeichen der Einheit um 1, 2, 3 oder 4 Stellen für den 1ten Fall mehr zur Rechten, und für den 2ten Fall mehr zur Linken ſchreibt.

So iſt
325. 67823 × 10 = 3256. 7823,
325. 67823 × 100 = 32567. 823,
325. 67823 × 1000 = 325678. 23,
325. 67823 × 10000 = 3256782. 3,
325. 67823 × 100000 = 32567823,
325. 67823 × 1000000 = 325678230.

und 32456 : 10 = 3245. 6,
32456 : 100 = 324. 56,
32456 : 1000 = 32. 456,

738. 56 : 10 = 73. 856,
738. 56 : 100 = 7. 3856,
738. 56 : 1000 = 0. 73856,
738. 56 : 10000 = 0. 073856,
738. 56 : 100000 = 0. 0073856.

124. Läßt man bey einer Zahl das Zeichen der Einheit weg, oder nimmt die Zehntheilchen für ganze Zahlen an; ſo wird die vorgelegte Zahl durch 1 und ſoviel 0 multiplicirt als ſie zehntheilige Ziffern hatte: wird daher dieſer Factor als ein Nenner unter das Product geſchrieben;

ben; ſo kommt ein Bruch zum Vorſchein, welcher der gegebenen Zahl gleich iſt.

So iſt $3.\ 45 = \frac{345}{100}$

$3.\ 526 = \frac{3526}{1000}$

$0.\ 0024 = \frac{24}{10000}$

$0.\ 00000025 = \frac{25}{100000000}$

$0.\ 12004 = \frac{12004}{100000}$

$0.\ 00203 = \frac{203}{100000}$

Denn auf ſolche Art wird die gegebene Zahl jedesmal durch dieſelbe Zahl multiplicirt und dividirt.

125. Das Addiren und Abziehen hat bey ſolchen Zahlen gar nichts beſonders: nur iſt wohl Acht zu geben, daß man immer gleichnamige, das iſt, 10theilchen zu 10theilchen, 100theilchen zu 100theilchen u. ſ. ſ. addire, oder voneinander abziehe.

Wenn wir daher die gegebenen Zahlen ſo ſchreiben, daß die Zeichen der Einheit gerad unter einander zu ſtehen kommen, ſo können wir bey der niedrigſten Stelle anfangen, und wie bey ganzen Zahlen fortfahren.

Es ſey 3. 45, 12. 0583 und 3456. 304 zu addiren; ſo ſind

3. 45		
12. 0583	}	die gegebenen Zahlen,
3456. 304		
und 3471. 8123		ihre Summe.

Es

Es ſey 204. 83002, 0. 0000246, 80. 956 und 45673. 704 zu addiren;

ſo ſind	204. 83002 0. 0000246 80. 956 45673. 704	die gegebenen Zahlen,
und	45959. 4900446	ihre Summe.

Iſt 34. 9283 von 834. 253184 abzuziehen;

ſo iſt	834. 253184	die gegebene Summe,
	34. 9283	die gegebene Zahl,
und	799. 324884	ihr Unterſcheid.

Sollte die gegebene Summe nicht ſoviel zehntheilige Ziffern enthalten als die gegebene Zahl; ſo kann man (weil die Nullen nach den Zehntheilchen von keiner Bedeutung ſind) die abgängigen Stellen mit 0 beſetzen, und wie zuvor verfahren.

Es ſey 8. 749898 von 17. 04 abzuziehen;

ſo iſt	17. 040000	die gegebene Summe
	8. 749898	die gegebene Zahl
und	8. 290102	ihr Unterſcheid.

Es ſey 0. 567838 von 18. 003 abzuziehen;

ſo iſt	18. 003000	die gegebene Summe
	0. 567838	die gegebene Zahl
und	17. 435162	ihr Unterſcheid.

Es ſey 0. 056749 von 8 abzuziehen;

ſo iſt	8. 000000	die gegebene Summe
	0. 056749	die gegebene Zahl
und	7. 943251	ihr Unterſcheid.

Fer-

Ferner ſey 84. 956 von 3. 2956784 abzuziehen;

ſo iſt + 3. 2956784 die gegebene Summe
+84. 9560000 die gegebene Zahl

und —81. 6603216 ihr Unterſcheid.

Es ſey endlich 47 von 33. 789342 abzuziehen;

ſo iſt + 33. 789342 die gegebene Summe
+ 47. 000000 die gegebene Zahl

und — 13. 210658 ihr Unterſcheid.

Es iſt $a \times b = ab$, und
$ac \times bd = abcd = ab \times cd$.

126. Wenn man daher einen Factor mit c und den andern mit d multipliciret; ſo wird ihr Product mit cd multipliciret.

Sieht man nun zween zehntheilige Factoren als ganze Zahlen an; ſo wird jeder durch 1 und ſoviel 0 multiplicirt, als er zehntheilige Ziffern hatte.

Folglich wird das Product, welches man erhält, wenn man zween zehntheilige Factoren wie ganze Zahlen miteinander multipliciret, auch durch 1 und ſoviel 0 multipliciret ſeyn, als beede Factoren zehntheilige Ziffern enthalten.

Daher wird man das Product aus zween zehntheiligen Factoren erhalten, wenn man ſolche wie ganze Zahlen miteinander multipliciret, und in dem Producte wieder ſoviel zehntheilige Stellen ſetzet, als derſelben in beeden Factoren waren.

Iſt 3. 4 mit 5. 21 zu multipliciren; ſo wird

$3.4 \times 10 = 34$
$5.21 \times 100 = 521$ und
$34 \times 521 = 17714$, alſo

$$3.4 \times 5.21 = \frac{17714}{1000} = 17.714.$$

Iſt

Iſt 0. 023 mit 2. 06 zu multipliciren; ſo wird

$$2.06 \times 100 = 206$$
$$0.023 \times 1000 = 23 \text{ und}$$
$$206 \times 23 = 4738, \text{ alſo}$$
$$2.06 \times 0.023 = \frac{4738}{100000} = 0.04738.$$

Iſt 0. 003 mit 0. 04 zu multipliciren; ſo wird

$$0.003 \times 1000 = 3$$
$$0.04 \times 100 = 4 \text{ und}$$
$$3 \times 4 = 12, \text{ alſo}$$
$$0.003 \times 0.04 = \frac{12}{100000} = 0.00012.$$

Es ſeyen 3.04 } 0.25 } die Factoren;

1520
608

ſo iſt 0.7600 = 0. 76 ihr Product.

Es ſeyen 3.4201 } 3.002 } die Factoren;

68402
102603

ſo iſt 10.2671402 ihr Product.

Es ſeyen 3456 } 2.03 } die Factoren;

10368
6912

ſo iſt 7015.68 ihr Product.

Es ſeyen 3560000 } die Factoren;
0.012

712
356

ſo iſt 42720.000 = 42720 ihr Product.

127. Weil das Product ſoviel zehntheilige Ziffern enthält als beede Factoren; ſo muß auch das Dividend ſoviel zehntheilige Ziffern enthalten als der Theiler und der Quotient, folglich der Quotient ſoviel, als herauskommen, wenn man die Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Theilers von der Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Dividends abzieht.

Man dividiret daher mit Zehntheilchen ebenſo, als wären es ganze Zahlen, und ſetzet in dem Quotienten ſoviel zehntheilige Stellen, als Einheiten herauskommen, wenn man die Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Theilers von der Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Dividends abzieht.

So iſt 0. 009 : 0. 03 = 0. 3
5. 0463 : 0. 09 = 56. 07
0. 002415 : 0. 7 = 0. 00345.

Wenn die Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Theilers von der Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Dividends abgezogen wird, und ein bejahender Unterſcheid zum Vorſchein kömmt; ſo iſt der Quotient durch 1 und ſoviel 0 zu dividiren, als dieſer Unterſcheid Einheiten enthält. Wenn daher dieſer Unterſcheid verneinend wird; ſo iſt der Quotient durch 1 und ſoviel 0 zu multipliciren, als dieſer Unterſcheid Einheiten enthält.

Daher wird 94. 5 : 0. 00009 = 1050000
0. 09 : 0. 00003 = 3000
16. 1 : 0. 007 = 2300.

Eben

Ebendas wird man auch erhalten, wenn man in ſolchen Fällen die abgängigen Stellen des Dividends vorläufig mit 0 beſetzen will, welches allemal angeht; indem die 0, nach den zehntheiligen Ziffern geſetzt, den Werth derſelben nicht ändert.

Dieſemnach wird

94.5 oder 94. 50000 : 0. 00009 = 1050000
0.09 oder 0. 09000 : 0. 00003 = 3000
16.1 oder 16. 100 : 0. 007 = 2300

Wenn nach verrichtetem Dividiren noch ein Reſt bleibt; ſo kann dem Dividende oder dem Reſte allemal wieder eine 0 nachgeſchrieben, und das Dividiren fortgeſetzet werden; nur müßen ſodann dieſe 0 bey Beſtimmung der Anzahl der zehntheiligen Ziffern des Quotienten nicht außer Acht gelaſſen werden.

So wird 0.045 : 0.04 = 1.125

```
0.045 : 0.04 = 1.125
  4
  --
  05
   4
  --
   10
    8
  ---
    20
    20
  ---
     0
```

Denn weil wir dem Reſte 2mal eine 0 nachgeſetzet haben; ſo enthält das Dividend nicht 3, ſondern 5 zehntheilige Ziffern.

Es ſey 0. 00515 durch 0. 032 zu dividiren;

ſo wird 0. 00515 : 0. 032 = 0. 1609375

```
32
---
195
192
---
 300
 288
 ---
  120
   96
  ---
   240
   224
   ---
    160
    160
    ---
      0
```

Denn da wir dem Reſte 5mal eine 0 nachgeſchrieben haben, ſo enthält das Dividend 10 zehntheilige Ziffern.

So oft dem Reſte eine 0 nachgeſetzet wird; ſo oft erhält man wieder eine Ziffer für den Quotienten. Es kann daher das Zeichen der Einheit für den Quotienten allemal ſchon beſtimmt werden, ehe man noch dem erſten Reſte eine 0 nachſetzet.

Denn weil im vorigen Beyſpiele

```
515 : 32 = 16
32
---
195
192
---
  3
```

und das Dividend 0.00515 fünf zehntheilige Ziffern, der Theiler 0. 032 aber drey derſelben enthält; ſo weiß man

man ſchon, daß der Quotient deren zwo enthalten muß, folglich daß

0. 00515 : 0. 032 = 0. 16 2c.
32
———
195
192
———
3

Wenn daher weder das Dividend noch der Theiler einige zehntheilige Ziffern enthält; ſo kann man nach den Ganzen, die für den Quotienten herauskommen, das Zeichen der Einheit ſetzen, dem Reſte immer wieder eine 0 nachſchreiben, und ſo lang fortfahren, bis kein Reſt mehr bleibt. So wird

7 : 2 = 3. 5
6
———
10
10
———
0

3 : 5 = 0. 6
0
———
30
30
———
0

9 : 4 = 2. 25
8
———
10
8
———
20
20
———
0

```
 7 : 8 = 0. 875
 0
---
 70
 64
---
  60
  56
---
   40
   40
---
    0

915 : 24 = 38. 125
 72
---
 195
 192
---
  30
  24
---
  60
  48
---
  120
  120
---
    0
```

Seßet man nach einer ganzen Zahl eine Nulle; ſo wird ſolche durch 10 multiplicirt, und ſeßet man eine 0 nach dem Reſte; ſo iſt es ebenſoviel, als hätte man ſolche nach dem Dividend geſeßet. Es wird daher das Dividend, folglich auch der Quotient durch 1 und ſoviel 0 multiplicirt, als man dem Reſte nachſeßet, folglich iſt der Quotient am Ende wieder durch 1 und ſoviel 0 zu dividiren, als man dem Reſte nachgeſchrieben hat.

Denn

Denn es iſt für das letzte Beyſpiel

$$915000 : 24 = 38125, \text{ alſo auch } \frac{915000}{1000} : 24$$

$$= \frac{38125}{1000} \text{ oder } 915 : 24 = 38.125.$$

und für das vorletzte $7000 : 8 = 875$, alſo

$$\frac{7000}{1000} : 8 = \frac{875}{1000} \text{ oder } 7 : 8 = 0.875.$$

ebenſo iſt $900 : 4 = 225$, alſo $\frac{900}{100} : 4 = \frac{225}{100}$

oder $9 : 4 = 2.25$ u. d. gl.

Da jede Einheit 10 Zehntheilchen; jedes Zehntheilchen 10 Hunderttheilchen; jedes Hunderttheilchen 10 Tauſendtheilchen u. ſ. f. ausmacht; ſo wird der Reſt der Einheiten in Zehntheilchen; jener der Zehntheilchen in Hunderttheilchen, jener der Hunderttheilchen in Tauſendtheilchen verwandelt, wenn man demſelben eine 0 nachſetzet. Daher müßen auch aus dieſem Grunde für den Quotienten, wie in vorigen Beyſpielen, wieder Zehntheilchen, Hunderttheilchen, Tauſendtheilchen u. ſ. f. herauskommen. Im letzten Beyſpiele giebt 915 : 24, 38 Ganze zum Quotienten, und 3 Ganze oder 30 Zehntheilchen zum Reſte; dieſe 30 Zehntheilchen dividirt durch 24, geben wieder 1 Zehntheilchen für den Quotienten, und 6 Zehntheilchen oder 60 Hunderttheilchen zum Reſte; dieſe 60 Hunderttheilchen dividirt durch 24, geben abermal 2 Hunderttheilchen für den Quotienten, und 12 Hunderttheilchen oder 120 Tauſendtheilchen zum Reſte; endlich geben dieſe 120 Tauſendtheilchen durch 24 dividirt noch 5 Tauſendtheilchen für den Quotienten, und 0 zum Reſte.

Nach dieſer Methode kann alſo jeder Reſt, und jeder gemeine Bruch in einen zehntheiligen Bruch verwandelt werden.

So iſt $\frac{7}{4} = 1.75$ | $\frac{5}{8} = 0.625$

$\frac{4}{5} = 0.8$ | $\frac{13}{4} = 3.25$

$\frac{3}{4} = 0.75$ | $\frac{9}{2} = 4.5$

$$\frac{345}{64} = 345 : 64 = 5.390625$$

```
320
 250
 192
  580
  576
   400
   384
    160
    128
     320
     320
       0
```

$\frac{1}{3} = 0.3333$ ꝛc. | $\frac{7}{6} = 1.1666$ ꝛc.

$\frac{2}{3} = 0.6666$ ꝛc. | $\frac{7}{9} = 0.7777$ ꝛc.

$\frac{5}{6} = 0.8333$ ꝛc. | $\frac{20}{9} = 2.2222$ u. ſ. f. ohne Ende.

$\frac{5}{7}$

$\frac{5}{7} = 0.\ 714285\ 714285\ 714285$ u. ſ. f. ohne Ende.

$\frac{65}{24} = 65 : 24 = 2.\ 7083333$ ꝛc.

```
48
——
170
168
———
 200
 192
 ———
   80
   72
   ——
    80
    72
    ——
     80
     72
     ——
      8 u. ſ. f. ohne Ende.
```

Dergleichen Quotienten, die man nie ohne Reſt erhalten kann, bleiben zwar immer kleiner als der Bruch; doch kommen ſolche dem Werthe deſſelben immer näher und näher, je weiter man die zehntheiligen Ziffern fortſetzet, und werden endlich gleich dem Bruche, ſobald man ſetzet, die zehntheiligen Ziffern gehen ohne Ende fort. Denn nach einer zehntheiligen Ziffer beträgt der Fehler weniger als $\frac{1}{10}$; nach zwoen, weniger als $\frac{1}{100}$; nach dreyen, weniger als $\frac{1}{1000}$; nach vieren, weniger als $\frac{1}{10000}$; nach fünfen, weniger als $\frac{1}{100000}$ u. ſ. f. folglich wird derſelbe nach unendlich vielen zehntheiligen Ziffern $= \frac{1}{\infty} = 0$.

Vom Multipliciren und Dividiren mit genannten Zahlen.

128.

Nebſt den zehntheiligen Brüchen, die darum ohne Nenner können ausgedrücket werden, weil die Ziffern derſelben ebenſo wie jene der ganzen Zahlen ihre Werthe von ihrer Stelle herbekommen, giebt es noch vielerley andere genannte Brüche, die ebenfalls ohne Nenner geſchrieben werden, weil die Theile der Einheit, woraus ſie beſtehen, ſchon durch einen beſondern Namen beſtimmet ſind. So heißen die 6ten Theile einer Klafter, Schuh; die 12ten Theile eines Schuhs, Zolle; die 12ten Theile eines Zolls, Linien: die 60ſten Theile einer Stunde, Minuten; die 60ſten Theile einer Minute, Sekunden; die 60ſten Theile einer Sekunde, Terzen: die 60ſten Theile eines Gulden, Kreuzer; die 8ten Theile eines Kreuzers, Heller: die 32ſten Theile eines Pfundes, Lothe; die 4ten Theile eines Lothes, Quintchen; u. d. g.

Wie aus dergleichen Brüchen zuſammengeſetzte Zahlen zu addiren, oder voneinander abzuziehen ſind, iſt ſchon Nro. 28 und 36 gezeigt worden: itzt iſt noch zu unterſuchen, wie mit denſelben zu multipliciren und zu dividiren ſey.

129. Wenn eine genannte Zahl mit einer andern genannten zu multipliciren iſt; ſo muß man eine ſo oft nehmen als die andere Einheiten enthält. Das Product z. B. aus 6 fl. und 5 Klaftern iſt 6 fl. 5mal genommen = 30 fl, oder 5 Klaftern 6mal genommen = 30 Klaftern. Ob itzt in dergleichen Fällen das Product mit einem oder dem andern Factore gleichnamig ſey, das muß die Frage, welche das Multipliciren veranlaſſet, entſcheiden. Fragt man, wieviel 5 Klaftern koſten, wenn eine Klafter

6fl.

6 fl. gilt; ſo iſt die Antwort: 6 fl. 5mal genommen = 30 fl; und fragt ſich, wieviel Klaftern man um 6 fl. bekomme, wenn um 1 fl. 5 Klaftern zu haben ſind: ſo iſt die Antwort: 5 Klafter 6mal genommen = 30 Klaftern.

Wenn nun die Factoren aus Ganzen und verſchiedenen Theilen der Einheit zuſammengeſetzet ſind; und man die Theile von jenem Factore, der anzeiget, wie oft der andere zu nehmen ſey, in einen Bruch von jener Einheit verwandelt, deren Product man ſchon kennet; ſo findet man auch das Product aus dieſen Theilen, wenn man das Product der Einheit mit dieſem Bruche multipliciret. Iſt zum Beyſpiele das Product von einer Klafter bekannt; ſo iſt (da $(^{\circ})$, $(^{I})$, $(^{II})$, $(^{III})$ über die Ziffern geſetzt Klaftern, Schuh, Zoll, und Linien bedeuten)

jenes von 1^{I} oder von $\frac{1^{\circ}}{6}$ der 6te Theil
von 2^{I} oder von $\frac{1^{\circ}}{3}$ der 3te Theil
von 3^{I} oder von $\frac{1^{\circ}}{2}$ der 2te Theil
von 4^{I} oder von $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6})^{\circ}$ der 2te + der 6te Theil
von 5^{I} oder von $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})^{\circ}$ der 2te + der 3te Theil davon:

Und iſt wieder das Product von 1^{I} bekannt; ſo iſt

jenes von 1^{II} oder von $\frac{1^{I}}{12}$ der 12te Theil
von 2^{II} oder von $\frac{1^{I}}{6}$ der 6te Theil
von 3^{II} oder von $\frac{1^{I}}{4}$ der 4te Theil
von 4^{II} oder von $\frac{1^{I}}{3}$ der 3te Theil
von 5^{II} oder von $(\frac{1}{4} + \frac{1}{6})^{I}$ der 4te + der 6te Theil
von 6^{II} oder von $\frac{1^{I}}{2}$ der 2te Theil
von 7^{II} oder von $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})^{I}$ der 3te + der 4te Theil
von 8^{II} oder von $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})^{I}$ der 3te + der 3te Theil
von 9^{II} oder von $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})^{I}$ der 2te + der 4te Theil

von

von 10^{II} oder von $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})^{I}$ der 2te + der 3te Theil
von 11^{II} oder von $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})^{I}$ der 3te + der 3te + der 4te Theil davon.

Wir werden daher das Product von ſolchen Factoren erhalten, wenn wir den einen Factor erſtlich mit der Ganzen und ſodann noch mit den Brüchen, woraus der andere beſteht, multipliciren, und endlich alle dieſe einzelnen Producte zuſammen addiren.

Eine Klafter gilt 2 fl. 6 kr.; wieviel werden 7 Klaftern 4 Schuh und 3 Zoll koſten?

Sovielmal 2 fl. und 6 kr., als die Zahl 7 Klaftern 4 Schuh und 3 Zoll Klaftern enthält. Daher ſind

fl.	kr.		
2	6		die Factoren
7°	4^{I}	3^{II}	

fl.	kr.	hl.	
14	42. . . .		das Product aus 7°
1	3. . . .		aus 3^{I}
0	21. . . .		aus 1^{I}
0	5	2	aus 3^{II}
16	11	2	aus 7° 4^{I} 3^{II}.

Eine Klafter gilt 3 fl. 12 kr. 7 hl.: wieviel werden 13 Klafter 5 Schuh und 6 Zoll koſten?

Sovielmal 3 fl. 12 kr. und 7 hl., als die Zahl 13 Klaftern 5 Schuh und 6 Zoll Klaftern enthält. Daher ſind

fl.	kr.	hl.	
3	12	7	die Factoren.
13°	5^{I}	6^{II}	

fl.	kr.	hl.	
41	47	3	das Product aus 13°
1	36	$3\frac{1}{2}$	aus 3^{I}
1	4	$2\frac{1}{3}$	aus 2^{I}
0	16	$\frac{7}{12}$	aus 6^{II}
44	44	$1\frac{5}{12}$	aus 13° 5^{I} 6^{II}.

Um

Um 1 fl. kauft man $1^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}$; wieviel Klaſtern wird man um 6 fl. 55 kr. kaufen?

Sovielmal $1^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}$, als die Zahl 6 fl. 55 kr. Gulden enthält. Daher ſind

1°	5^{I}	6^{II}		die Factoren
fl.	kr.			
6	55			
11°	3^{I}	0^{II}	^{III}	das Product aus 6 fl.
0	5	9	....	aus 30 kr.
0	3	10	....	aus 20 kr.
0	0	11	6	aus 5 kr.
13	1	6	6	aus 6 fl. 55 kr.

Um 1 fl. kauft man $2^{\circ}\ 4^{I}\ 3^{II}$; wieviel Klaſtern wird man um 9 fl. 18 kr. bekommen?

Sovielmal $2^{\circ}\ 4^{I}\ 3^{II}$, als die Zahl 9 fl. 18 kr. Gulden enthält. Daher ſind

2°	4^{I}	3^{II}		die Factoren
fl.	kr.			
9	18			
24°	2^{I}	3^{II}	^{III}	das Product aus 9 fl.
0	4	0	9	aus 15 kr.
0	0	9	9	aus 3 kr.
25	1	1	6	aus 9 fl. 18 kr.

Ein Pfund gilt 3 fl. 25 kr. 5 hl.; wieviel werden 7 Pfund und 9 Loth koſten?

Sovielmal 3 fl. 25 kr. 5 hl., als die Zahl 7 Pfund und 9 Loth Pfunde enthält. Daher ſind

fl.	kr.	hl.	
3	25	5	die Factoren
Pf.	Lt.		
7	9		
fl.	kr.	hl.	
23	59	3	das Product aus 7 Pf.
0	51	$3\frac{1}{4}$	aus 8 Lt.
0	6	$3\frac{13}{32}$	aus 1 Lt.
24	57	$1\frac{21}{32}$	aus 7 Pf. 9 Lt.

Ein Körper durchläuft in einer Stunde 3500 Klaftern und 4 Schuh; wieviel Klaftern wird er in 3 Stunden 35 Minuten und 25 Sekunden durchlaufen?

Sovielmal 3500 Klaftern 4 Schuh, als die Zahl 3 Stund 35 Minuten und 25 Sekunden Stunden enthält. Daher sind

3500°	4'	0''		die Factoren.
St.	M.	S.		
3	35	25		
10502°	0'	0''	'''	das Product aus 3 St.
1750	2	0	....	aus 30 M.
291	4	4	....	aus 5 M.
24	1	10	4	aus 25 S.
12568	2	2	4	aus 3 St. 35 M. 25 S.

Weil das Product allemal mit einem aus den Factoren gleichnamig iſt; ſo muß der Quotient mit dem Dividende gleichnamig oder ungleichnamig ſeyn, nachdem der Theiler mit demſelben ungleichnamig oder gleichnamig iſt.

Wenn z. B. 5 Klaftern 30 Gulden koſten; ſo koſtet 1 Klafter den 5ten Theil von 30 Gulden, alſo

$$\frac{30\text{fl.}}{5} = 6 \text{ fl.}$$

Wenn

Wenn man um 6 fl. 30 Klaftern kauft; ſo kauft man um 1 fl. den 6ten Theil von 30 Klaftern, alſo $\frac{30 \text{Kl.}}{6} = 5$ Klaftern.

Wenn 6 fl. eine Klafter geben; ſo geben 30 fl. ſovielmal eine Klafter, als oft 6 fl. in 30 fl. enthalten ſind, alſo $\frac{30}{6} = 5$ Klaftern.

Und wenn endlich 5 Klaftern einen Gulden koſten; ſo koſten 30 Klaftern ſovielmal einen Gulden, als oft 5 Klaftern in 30 Klaftern enthalten ſind; alſo $\frac{30}{5} = 6$ fl. In den zween erſten Fällen iſt der Quotient mit dem Dividenden gleichnamig; in den zween letzten aber ungleichnamig.

130. Das Dividiren mit Zahlen, die aus Ganzen und verſchiedenen Theilen der Einheit zuſammengeſetzet ſind, hat gar nichts beſonders. Denn wenn der Quotient mit dem Dividende gleichnamig iſt; ſo geben die Ganzen des Dividends durch die Ganzen des Theilers dividirt die Anzahl der Ganzen des Quotienten, und dieſe ſo oft genommen, als der Theiler Einheiten enthält, und von dem Dividende abgezogen, den erſten Reſt, der wieder durch die Ganzen des Theilers dividirt die Anzahl der höchſten Theile des Quotienten giebt u. ſ. f. Iſt aber der Theiler mit dem Dividenden gleichnamig; ſo geben wieder die Ganzen des Dividends durch die Ganzen des Theilers dividirt die Anzahl der Ganzen des Quotienten, und der Theiler ſo oft genommen, als der gefundene Quotient Einheiten enthält, und von dem Dividenden abgezogen, den erſten Reſt, der mit dem Nenner der höchſten Theile des Quotienten multiplicirt und wieder durch die Ganzen des Theilers dividirt die Anzahl der höchſten Theile des Quotienten giebt u. ſ. f. Das iſt eine Methode. Die andere beſteht darinn: daß man für jeden Fall den Quotienten durch ei-

nen

nen Bruch ausdrücket; Zähler und Nenner deſſelben ſo lange durch gleiches multipliciret, bis beede nur noch aus ganzen Zahlen beſtehen, und dann endlich jenen durch dieſen dividiret.

Wir wollen beede Methoden auf folgende Beyſpiele anwenden.

Wenn 7° 4' 3'' 16 fl. 11 kr. 2 hl. koſten; ſo wird 1° nur jenen Theil von 16 fl. 11 kr. 2 hl. koſten, der heraus kömmt, wenn man die Anzahl der Gulden, welche in der Zahl 16 fl. 11 kr. 2 hl. enthalten ſind, durch die Anzahl der Klaftern, die in der Zahl 7° 4' 3'' enthalten ſind, dividiret. Daher wird der Werth von einer Klafter nach der 1ſten Methode

fl.	kr.	hl.	fl. kr.
16	11	2	: 7° 4' 3'' = 2 6
14	0	0	. . . = 2 fl. × 7°
1	0	0	. . . = 2 fl. × 3'
0	20	0	. . . = 2 fl. × 1'
0	5	0	. . . = 2 fl. × 3''
15	25	0	. . . = 2 fl. × 7° 4' 3''
0	46	2	. . . der 1ſte Reſt.
0	42	0	. . . = 6 kr. × 7°
0	3	0	. . . = 6 kr. × 3'
0	1	0	. . . = 6 kr. × 1'
0	0	2	. . . = 6 kr. × 3''
0	46	2	. . . = 6 kr. × 7° 4' 3''
	0		

oder nach der 2ten Mothode

$$\overset{\text{fl.}}{16}\ \overset{\text{kr.}}{11}\ \overset{\text{hl.}}{2} : 7^\circ\, 4'\, 3'' = \frac{(\overset{\text{fl.}}{16}\ \overset{\text{kr.}}{11}\ \overset{\text{hl.}}{2}) \times 4}{(7^\circ\, 4'\, 3'') \times 4}$$

$$=$$

$$= \frac{(64 \text{ fl. } 45 \text{ kr.}) \times 6}{(30^\circ \; 5^{I}) \times 6} = \frac{(388 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}) \times 2}{185^\circ \times 2} = \frac{777}{370}$$

$$= 777 : 370 = 2 \text{ fl. } 6 \text{ kr.}$$

777 : 370 = 2 fl. 6 kr.		
740		
37 fl. =	2220 kr.	
	2220	
	0	

Wenn 13° 1ᴵ 6ᴵᴵ 6ᴵᴵᴵ 6 fl. 55 kr. koſten; ſo kann man um 1 fl. nur ſoviel Klaftern haben, als herauskommen, wenn man 13° 1ᴵ 6ᴵᴵ 6ᴵᴵᴵ durch 6 fl. 55. kr. dividiret. Daher erhält man um 1 fl. nach der 1ten Methode

°	ᴵ	ᴵᴵ	ᴵᴵᴵ	
13°	1ᴵ	6ᴵᴵ	6ᴵᴵᴵ	: 6 fl. 55 kr. = 1° 5ᴵ 6ᴵᴵ
6	0	0	0	. . . = 1° × 6 fl.
0	3	0	0	. . . = 1° × 30 kr.
0	2	0	0	. . . = 1° × 20 kr.
0	0	6	0	. . . = 1° × 5 kr.
6	5	6	0	. . . = 1° × 6 fl. 55 kr.
6	2	0	6	. . . der 1ſte Reſt.
5	0	0	0	. . . = 5ᴵ × 6 fl.
0	2	6	0	. . . = 5ᴵ × 30 kr.
0	1	8	0	. . . = 5ᴵ × 20 kr.
0	0	5	0	. . . = 5ᴵ × 5 kr.
5	4	7	0	. . . = 5ᴵ × 6 fl. 55 kr.
0	3	5	6	. . . der 2te Reſt.
0	3	0	0	. . . = 6ᴵᴵ × 6 fl.
0	0	3	0	. . . = 6ᴵᴵ × 30 kr.
0	0	2	0	. . . = 6ᴵᴵ × 20kr.
0	0	0	6	. . . = 6ᴵᴵ × 5 kr.
0	3	5	6	. . . = 6ᴵᴵ × 6 fl. 55 kr.
	0			

oder nach der 2ten Methode

$$13^\circ\ 1'\ 6''\ 6''' : \overset{\text{fl.}}{6}\ \overset{\text{kr.}}{55} = \frac{(13^\circ\ 1'\ 6''\ 6''') \times 2}{(\overset{\text{fl.}}{6}\ \ \overset{\text{kr.}}{55}) \times 2}$$

$$= \frac{(26^\circ\ 3'\ 1'') \times 12}{(\overset{\text{fl.}}{13}\ \ \overset{\text{kr.}}{50}) \times 12} = \frac{(318^\circ\ 1') \times 6}{166\text{fl.} \times 6}$$

$$= \frac{1909}{996} = 1909 : 996 = 1^\circ\ 5'\ 6''$$

$$\begin{array}{l} \underline{996} \\ 913^\circ = 5478' \\ \qquad\quad \underline{4980} \\ \qquad\quad 498' = 5976'' \\ \qquad\qquad\qquad \underline{5976} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Wenn 3 fl. 12 kr. 7 hl. eine Klafter geben; ſo geben 44 fl. 44 kr. $1\frac{5}{12}$ hl. nach der 1ſten Methode

fl.	kr.	hl.	
44	44	$1\frac{5}{12}$	: 3 fl. 12 kr. 7 hl. = 13° 5' 6''
41	47	3	. . . = 3 fl. 12. kr. 7 hl. × 13
2	56	$6\frac{5}{12}$	. . der 1ſte Reſt
17	40	$6\frac{1}{2}$	. . . der 1ſte Reſt × 6
16	4	3	. . . = 3 fl. 12 kr. 7 hl. × 5
1	36	$3\frac{1}{2}$	. . der 2te Reſt
19	17	2	. . . der 2te Reſt × 12
19	17	2	. . . = 3 fl. 12 kr. 7 hl. × 6
	0		

oder nach der 2ten Methode

$$\frac{\overset{\text{fl.}}{(44}\ \overset{\text{kr.}}{44}\ \overset{\text{hl.}}{1\tfrac{5}{12}}) \times 12}{\underset{}{\overset{\text{fl.}}{(3}}\ \overset{\text{kr.}}{12}\ \overset{\text{hl.}}{7}) \times 12} = \frac{\overset{\text{fl.}}{(536}\ \overset{\text{kr.}}{50}\ \overset{\text{hl.}}{1}) \times 8}{\overset{\text{fl.}}{(38}\ \overset{\text{kr.}}{34}\ \overset{\text{hl.}}{4}) \times 8}$$

$$= \frac{\overset{\text{fl.}}{(4294}\ \overset{\text{kr.}}{41}) \times 60}{\overset{\text{fl.}}{(308}\ \overset{\text{kr.}}{36}) \times 60} = \frac{257681}{18516}$$

$$= 257681 : 18516 = 13^\circ\ 5'\ 6''.$$

```
 18516
 -----
  72521
  55548
 ------
  16973° = 101838'
            92580
           ------
             9258' = 111096''
                     111096
                     ------
                          0
```

Wenn 2° 4' 3'' einen Gulden koſten; ſo koſten 25° 1' 1'' 6''' nach der erſten Methode

```
  25°   1'   1''   6''' : 2° 4' 3'' = 9 fl. 18 kr.
  24    2    3     0 . . . = 2° 4' 3'' × 9
 ---------------------------------------------
   0    4   10     6 . . . der 1ſte Reſt
  48    4    6 . . . . . . der 1ſte Reſt × 60
  48    4    6 . . . . . . = 2° 4' 3'' × 18
 --------------
   0
```

oder nach der 2ten Methode

$$\frac{(25^\circ 1' 1'' 6''') \times 2}{(2^\circ 4' 3'') \times 2} = \frac{(50^\circ 2' 3'') \times 4}{(5^\circ 2' 6'') \times 4} = \frac{(201^\circ 3') \times 6}{(21^\circ 4') \times 6}$$

R 2 = 1209

$$= \frac{1209}{130} = 1209 : 130 = 9 \text{ fl. } 18 \text{ kr.}$$

```
1209 : 130 = 9 fl. 18 kr.
1170
----
  39 fl. = 2340 kr.
            130
           ----
           1040
           1040
           ----
              0
```

Wenn 7 Pfund 9 Loth, 24 fl. 57 kr. $1\frac{21}{32}$ hl. koſten; ſo koſtet ein Pfund nach der 1ſten Methode

fl.	kr.	hl	Pf. Lt. fl. kr. hl.
24	57	$1\frac{21}{32}$	: 7 9 = 3 25 5
21	0	0	. . = 3 fl. × 7 Pf.
0	45	0	. . = 3 fl. × 8 Lt.
0	5	5	. . = 3 fl. × 1 Lt.
21	50	5	. . = 3 fl. × 7 Pf. 9 Lt.
3	6	$4\frac{21}{32}$	. der erſte Reſt
2	55	0	. . = 25 kr. × 7 Pf.
0	6	2	. . = 25 kr. × 8 Lt.
0	0	$6\frac{1}{4}$	. . = 25 kr. × 1 Lt.
3	2	$\frac{1}{4}$	. . = 25 kr. × 7 Pf. 9 L.
0	4	$4\frac{13}{32}$	. der 2te Reſt
0	4	3	. . = 5 hl. × 7 Pf.
0	0	$1\frac{1}{4}$	. . = 5 hl. × 8 Lt.
0	0	$\frac{5}{32}$	. = 5 hl. × 1 Lt.
0	4	$4\frac{13}{32}$	. = 5 hl. × 7 Pf. 9 Lt,
	0		

oder nach der 2ten Methode

$$\frac{(24 \text{ fl. } 57 \text{ kr. } 1\frac{21}{32} \text{ hl.}) \times 32}{(7 \text{ Pf. } 9 \text{ Lt.}) \times 32} = \frac{(798 \text{ fl. } 30 \text{ kr. } 5 \text{ hl.}) \times 8}{233 \text{ Pf.} \times 8} =$$

$$= \frac{(\overset{\text{fl.}}{6388}\ \overset{\text{kr.}}{5}) \times 60}{(1864\ \text{Pf.}) \times 60} = \frac{383285}{111840}$$

$$= 383285 : 111840 = \overset{\text{fl.}}{3}\ \overset{\text{kr.}}{25}\ \overset{\text{hl.}}{5}$$

```
335520
------
 47765 fl. = 2865900 kr.
             223680
             ------
              629100
              559200
              ------
               69900 kr. = 559200 hl.
                           559200
                           ------
                                0
```

Wenn man um 3 fl. 25 kr. 5 hl. ein Pfund kauft; ſo kauft man um 24 fl. 57 kr. $1\frac{21}{32}$ hl. nach der 1ſten Methode

fl.	kr.	hl.	
24	57	$1\frac{21}{32}$	: 3 fl. 25 kr. 5 hl. = 7 Pf. 9 Lt.
23	59	3	. . = 3 fl. 25 kr. 5 hl. × 7
0	57	$6\frac{21}{32}$	. = der 1ſte Reſt
30	50	5	. . = der 1ſte Reſt × 32
30	50	5	. . = 3 fl. 25 kr. 5 hl. × 9
	0		

oder nach der 2ten Methode

$$\frac{(\overset{\text{fl.}}{24}\ \overset{\text{kr.}}{57}\ \overset{\text{hl.}}{1\frac{21}{32}}) \times 32}{(\overset{\text{fl.}}{3}\ \overset{\text{kr.}}{25}\ \overset{\text{hl.}}{5}) \times 32} = \frac{(\overset{\text{fl.}}{798}\ \overset{\text{kr.}}{30}\ \overset{\text{hl.}}{5}) \times 8}{(\overset{\text{fl.}}{109}\ \overset{\text{kr.}}{40}) \times 8}$$

 =

$$= \frac{(\overset{\text{fl.}}{6388}\ \ \overset{\text{kr.}}{5}) \times 60}{(\overset{\text{fl.}}{877}\ \ \overset{\text{kr.}}{20}) \times 60} = \frac{383285}{52640}$$

$$= 383285 : 52640 = 7 \text{ Pf. } 9 \text{ Lt.}$$

$$\begin{array}{r} 368480 \\ \hline 14805 \text{ Pf.} = 473760 \text{ Lt.} \\ 473760 \\ \hline 0 \end{array}$$

Von der Auflöſung der gemeinſten Aufgaben.

131.

Da 2 Klafter immer 2mal ſoviel, 3 Klaftern 3mal ſoviel, 4 Klaftern 4mal ſo viel koſten u. ſ. f. als eine Klafter; ſo wird aus dem Werthe einer Klafter der Werth von jeder Anzahl Klaftern gefunden, wenn man jenen durch dieſe Anzahl Klaftern multipliciret: und da der Werth von einer Klafter immer nur der 2te Theil des Werthes von 2 Klaftern, der 3te Theil des Werthes von 3 Klaftern, der 4te Theil des Werthes von 4 Klaftern iſt u ſ. f; ſo wird aus dem Werthe von jeder Anzahl Klaftern der Werth von einer gefunden, wenn man jenen durch dieſe Anzahl Klaftern dividiret.

Wenn daher der Werth von einer gewiſſen Anzahl Klaftern bekannt iſt; ſo kann auch allemal der Werth von was immer für einer andern Anzahl Klaftern gefunden werden. Denn dividiren wir durch jede Anzahl Klaftern ihren Werth; ſo erhalten wir den Werth von einer Klafter: und multipliciren wir dieſen wieder durch jede andere Anzahl Klaftern; ſo erhalten wir auch den Werth von dieſer andern Anzahl Klaftern.

Wenn z. B. 5 Klafter 12 Gulden gelten; ſo gilt

1 Kl. $\frac{12}{5}$ fl., alſo 10 Kl. $\frac{12}{5}$ fl. × 10 = 24 fl.

13 Kl. $\frac{12}{5}$ fl. × 13 = $\frac{156}{5}$ fl. = 31 $\frac{1}{5}$ fl.

14 Kl. $\frac{12}{5}$ fl. × 14 = $\frac{168}{5}$ fl. = 33 $\frac{3}{5}$ fl.

u. ſ. w.

Ebenſo findet man aus der Anzahl der Klaftern, welche 1 Gulden giebt, die Anzahl der Klaftern, welche mehrere Gulden geben, wenn man die Anzahl der Klaftern von einem Gulden mit der Anzahl dieſer Gulden multipliciret; und aus der Anzahl der Klaftern, welche man um mehrere Gulden kauft, wird die Anzahl der Klaftern gefunden, welche man um einen Gulden kauft, wenn man die Anzahl der Klaftern von mehreren Gulden durch die Anzahl dieſer Gulden dividiret.

Wenn daher die Klaftern, welche man um mehrere Gulden kauft, bekannt ſind; ſo kann man auch allemal finden, wieviel Klaftern um jede andere Anzahl Gulden gekauft werden. Denn dividiren wir die Klaftern durch die Anzahl der Gulden, um welche ſie gekaufet werden; ſo erhalten wir die Klaftern, welche man um einen Gulden kauft, und multipliciren wir dieſe Klaftern ſodann mit jeder andern Anzahl Gulden, ſo erhalten wir auch die Klaftern, welche um dieſe andere Anzahl Gulden zu haben ſind.

Wenn z. B. 10 Klaftern 24 fl. koſten; ſo bekommt man

um 1 fl. $\frac{10\,\text{Kl.}}{24}$, alſo

um 30 fl. $\frac{10\,\text{Kl.}}{24} \times 30 = \frac{300\,\text{Kl.}}{24} = \frac{100\,\text{Kl.}}{8} = 12\frac{1}{2}$ Kl.

um 12 fl. $\frac{10 \text{ Kl.}}{24} \times 12 = \frac{120 \text{ Kl.}}{24} = \frac{40 \text{ Kl.}}{8} = 5$ Kl.

um 64 fl. $\frac{10 \text{ Kl.}}{24} \times 64 = \frac{640 \text{ Kl.}}{24} = \frac{80 \text{ Kl.}}{3} = 26\frac{2}{3}$ Kl.

Was wir von den Klaftern und ihrem Werthe geſagt haben, das laͤßt ſich auch auf jede Art Waaren und ihre Preiſe, und uͤberhaupt auf jede zwo Arten der Groͤßen anwenden, welche ſo miteinander verbunden ſind, daß, ſobald eine das 2, 3, 4 oder nfache wird, allemal auch die andere das 2, 3, 4 oder nfache werde. Daher koͤnnen folgende Fragen gar leicht, wie folgt, beantwortet werden.

10 Ellen koſten 45 Kreutzer: was koſten 150 Ellen?

Weil 10 Ellen 45 Kreutzer koſten; ſo koſtet 1 Elle $\frac{45}{10}$ kr., als 150 Ellen $\frac{45}{10}$ kr. $\times 150 = 45$ kr. $\times 15 = 675$ kr. $=$ 11 fl. 15 kr.

$\frac{2}{3}$ Ellen gelten $\frac{4}{5}$ Gulden; wieviel gelten $\frac{7}{8}$ Ellen?

Weil $\frac{2}{3}$ Ellen $\frac{4}{5}$ fl. gelten; ſo gilt 1 Elle $\frac{4}{5}$ fl. $: \frac{2}{3} = \frac{12}{10}$ fl. $= \frac{6}{5}$ fl.; alſo gelten $\frac{7}{8}$ Ellen $\frac{6}{5}$ fl. $\times \frac{7}{8} = \frac{42}{40}$ fl. $= \frac{21}{20}$ fl. $= 1\frac{1}{20}$ fl. $=$ 1 fl. 3 kr.

Um 5 fl. kauft man 2 Ellen: wieviel Ellen werden 38 fl. koſten?

Weil 5 fl. 2 Ellen geben; ſo giebt 1 fl. $\frac{2}{5}$ Ellen; ſo geben 38 fl. $\frac{2}{5}$ Ellen $\times 38 = \frac{76}{5}$ Ellen $= 15\ \frac{1}{5}$ Ellen.

Um $\frac{3}{5}$ fl. kauft man $\frac{5}{6}$ Ellen: wieviel Ellen wird man um $3\ \frac{5}{7}$ fl. erhalten.

Weil $\frac{3}{5}$ fl. $\frac{5}{6}$ Ellen geben; ſo giebt 1 fl. $\frac{5}{6}$ Ellen $: \frac{3}{5} = \frac{25}{18}$ Ellen; alſo geben $3\ \frac{5}{7}$ fl. $\frac{25}{18}$ Ellen $\times\ 3\ \frac{5}{7} = \frac{25}{18}$ Ellen $\times \frac{26}{7} = \frac{650}{126}$ Ellen $= 5\ \frac{10}{63}$ Ellen.

1000 fl. Kapital tragen jährlich 55 fl. Zins: wieviel werden 8900 fl. Kapital jährlich tragen?

Weil 1000 fl. Kapital 55 fl. Zinß tragen; ſo trägt 1 fl. Kapital $\frac{55}{1000}$ fl. Zins; alſo tragen 8900 fl. Kapital $\frac{55}{1000} \times 8900 = \frac{55 \times 8900}{1000} = \frac{55 \times 89}{10}$ $= \frac{11 \times 89}{2} = \frac{979}{2} = 489\frac{1}{2}$ fl. Zins.

100 fl. Kapital tragen jährlich 4 fl. Zins: wie groß muß das Kapital ſeyn, damit es 400 fl. Zins trage?

Weil 4 fl. Zins 100 fl. Kapital begehren; ſo begehrt 1 fl. Zins $\frac{100}{4}$ fl. Kapital; alſo begehren 400 fl. Zins $\frac{100}{4}$ fl. $\times$ 400 $= \frac{40000}{4} =$ 10000 fl. Kapital.

Ein Körper durchläuft in 2 Stunden 5940 Klaftern: wieviel Klaftern wird er in $7\frac{1}{2}$ Stunden durchlaufen?

Weil er in 2 Stunden 5940 Klaftern durchläuft; ſo macht er in einer Stunde $\frac{5940}{2} = 2970$ Klaftern, alſo in $7\frac{1}{2}$ Stunden $2970 \times 7\frac{1}{2} = 2970 \times \frac{15}{2}$ $=$ 22275 Klaftern.

20 Maurer verfertigen eine Mauer von gewiſſer Höhe und Breite, die 9 Klaftern lang iſt: wieviel Maurer ſind nöthig um einer Mauer von gleicher Höhe und Breite und $20\frac{1}{4}$ Klaftern Länge in der nämlichen Zeit fertig zu werden?

Weil 9 Klaftern Länge 20 Maurer erfodern; ſo erfodert 1 Klafter $\frac{20}{9}$ Maurer; alſo erfodern $20\frac{1}{4}$ Klaftern $\frac{20}{9} \times 20\frac{1}{4} = \frac{20}{9} \times \frac{81}{4} = 45$ Maurer.

132. Sind nun die zwo Arten Größen, wovon die Rede iſt, ſo miteinander verbunden, daß die von einer Art das 2, 3, 4 oder nfache werden, ſo oft ſich jene von der andern Art in den 2ten, 3ten, 4ten oder nten Theil verwandeln; ſo ſind dergleichen Fragen zwar etwas

an=

anders, aber doch noch immer leicht, wie folgt, aufzulöſen.

5 Mäurer verfertigen ein gewiſſes Stück Mauer in 40 Tagen: wieviel Mäurer braucht man, daß dieſe Mauer in 8 Tagen fertig werde?

Weil 5 Mäurer 40 Tage brauchen; ſo ſind 5mal $40 = 200$ Tagesarbeiten für einen Mann zu verrichten. Dieſes ſoll innerhalb 8 Tagen geſchehen; alſo kommen auf jeden Tag $\frac{200}{8} = 25$ Tagesarbeiten; folglich ſind auch 25 Mäurer zu dingen.

Wir haben Lebensmittel für 240 Mann auf 150 Tage: wieviel Mann werden wir auf 40 Tage mit denſelben Lebensmitteln erhalten können?

Weil 240 Mann 150 Tage zu leben haben; ſo haben wir 150mal 240 oder 150×240 Tagesportionen für einen Mann. Es trift alſo auf jeden Tag $\frac{150 \times 240}{40} = \frac{150 \times 24}{4} = 150 \times 6 = 900$ Portionen; folglich werden dieſe Lebensmittel auf 40 Tage für 900 Mann hinreichen.

In einer Feſtung haben 300 Mann Beſatzung noch auf 30 Tage hinlängliche Lebensmittel; nun ſtoſſen noch 150 Mann dazu: wie lange werden dieſelben Lebensmittel hinreichen?

Weil 300 Mann 30 Tage zu leben haben; ſo müßen die Lebensmittel aus 30mal $300 = 9000$ Tagesportionen für einen Mann beſtehen. Nun werden täglich 450 verzehrt; folglich werden ſie auf $\frac{9000}{450} = \frac{900}{45} = \frac{100}{5} = 20$ Tage hinreichen.

133. Damit wir uns allgemein ausdrücken lernen, wollen wir noch folgende Fragen beantworten:

Wieviel machen a fl. Kreutzer aus?

1 fl. giebt 60 Kreutzer; alſo geben
2 fl. 2mal 60 Kreutzer
3 fl. 3mal 60 Kreutzer und
a fl. amal 60 Kreuzer oder 60a Kreutzer.

Wieviel geben b Siebenzehner Kreutzer?

1 Siebenzehner giebt 17 Kreutzer
2 Siebenzehner geben 2mal 17 Kreutzer
3 Siebenzehner geben 3mal 17 Kreutzer; alſo geben
b Siebenzehner bmal 17 Kreutzer oder 17b Kreutzer.

Wieviel geben x Thaler Groſchen?

1 Thaler macht 30 Groſchen
2 Thaler 2mal 30 Groſchen
3 Thaler 3mal 30 Groſchen; alſo machen
x Thaler xmal 30 Groſchen oder 30x Groſchen.

Ein Stück von einer gewiſſen Münzſorte gilt y Kreutzer: wieviel werden a ſolche Stücke Kreutzer gelten?

Weil 1 Stück y Kreutzer gilt; ſo gelten
2 Stücke 2mal y Kreutzer
3 Stücke 3mal y Kreutzer
4 Stücke 4mal y Kreutzer, alſo
a Stücke amal y Kreutzer oder ay Kreutzer.

Wieviel koſten a Maaß vom 18 Kreutzer Wein?

1 Maaß gilt 18 Kreutzer
2 Maaß 2mal 18 Kreutzer
3 Maaß 3mal 18 Kreutzer, alſo
a Maaß amal 18 Kreutzer oder 18a Kreutzer.

Wie-

Wieviel koſten c Maaß vom x Kreuzer Wein?

1 Maaß koſtet x Kreuzer
2 Maaß 2mal x Kreuzer
3 Maaß 3mal x Kreuzer, alſo
c Maaß cmal x Kreuzer oder cx Kreuzer.

Eine Elle koſtet b fl.: wieviel koſten a Ellen?

Weil 1 Elle b fl. gilt; ſo gelten
2 Ellen 2mal b fl.
3 Ellen 3mal b fl.
4 Ellen 4mal b fl., alſo
a Ellen amal b fl. oder ab fl.

Eine Mark zehnlöthig Silber enthält 10 Loth fein Silber: wieviel Loth fein Silber werden a Mark enthalten?

Weil 1 Mark 10 Loth fein Silber enthält; ſo enthalten
2 Mark 2mal 10 Loth
3 Mark 3mal 10 Loth
4 Mark 4mal 10 Loth, alſo
a Mark amal 10 Loth oder 10a Loth fein Silber.

Wieviel Loth fein Silber enthalten a Mark von xlöthigen Silber?

1 Mark enthält x Loth
2 Mark 2mal x Loth
3 Mark 3mal x Loth, alſo
a Mark amal x Loth oder ax Loth fein Silber.

Wieviel machen a Kreuzer Gulden aus?

Weil 60 Kreuzer 1 Gulden geben; ſo geben a Kreuzer ſoviel Gulden, als oft 60 in a enthalten iſt, alſo $\frac{a}{60}$ fl.

Wie-

Wieviel geben y Groſchen Thaler?

Weil 30 Groſchen 1 Thaler ausmachen; ſo machen y Groſchen ſoviel Thaler aus, als oft 30 in y enthalten iſt, alſo $\frac{y}{30}$ Thaler.

c Mark Silber enthalten d Loth fein Silber: wieviel Loth fein Silber enthält 1 Mark?

Weil c Mark d Loth enthalten; ſo enthält 1 Mark den cten Theil von d Loth, alſo $\frac{d}{c}$ Loth fein Silber.

c Mark Silber enthalten d Loth fein Silber: wieviel Loth fein Silber enthalten x Mark?

Weil c Mark d Loth enthalten; ſo enthält 1 Mark $\frac{d}{c}$ Loth, alſo x Mark xmal $\frac{d}{c}$ Loth oder $\frac{dx}{c}$ Loth fein Silber.

$\frac{a}{b}$ Ellen koſten $\frac{c}{d}$ Gulden: wiviel Gulden koſten $\frac{m}{n}$ Ellen?

Weil $\frac{a}{b}$ Ellen $\frac{c}{d}$ Gulden, koſten; ſo koſtet eine Elle den $\frac{a}{b}$ten Theil von $\frac{c}{d}$ Gulden, oder $\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{bc}{ad}$ Gulden; alſo koſten $\frac{m}{n}$ Ellen $\frac{m}{n}$mal $\frac{bc}{ad}$ Gulden oder $\frac{mbc}{nad}$ Gulden.

Von

Von den Gleichungen.

134.

Eine Gleichung iſt nichts anders, als ein doppelter Ausdruck einerley Größen.

Wenn z. B. $\frac{ax}{b} + c$ ebenſoviel iſt, als $\frac{nx}{e} - d$;

ſo iſt $\frac{ax}{b} + c = \frac{nx}{e} - d$ eine Gleichung.

Jener Ausdruck, welcher auf einer Seite des Gleichungszeichens ſteht, macht ein **Glied**: und jener, welcher ſich auf der andern Seite des Gleichungszeichens befindet, macht das andere **Glied** der Gleichung aus. So iſt $\frac{ax}{b} + c$ ein Glied, und $\frac{nx}{e} - d$ das andere Glied vorgelegter Gleichung.

Weil die beyden Glieder einer Gleichung einerley bedeuten; ſo muß auch allemal wieder einerley herauskommen, wenn man zu beyden Gleiches addirt, von beyden Gleiches abzieht, beyde durch Gleiches multipliciret, oder beyde durch Gleiches dividiret.

Wenn man daher beyde Glieder einer Gleichung, die Brüche enthält, nach und nach durch die Nenner dieſer Brüche multipliciret; ſo gelanget man endlich zu einer Gleichung, die von allen Brüchen befreyt iſt.

Es ſey z. B. $\frac{ax}{b} + c = \frac{nx}{e} - d$; ſo iſt auch

$ax + bc = \frac{bnx}{e} - bd$; und endlich

$aex + bce = bnx - bde$.

Wenn

Wenn man einen bejahenden oder verneinenden einzelnen Ausdruck von einem Gliede weglåßt; ſo iſt es ebenſoviel, als håtte man denſelben von dieſem Gliede abgezogen: und ſetzet man ebendieſen Ausdruck mit verånderten Zeichen in das andere Glied; ſo wird er auch von dieſem abgezogen.

Låßt man daher einen oder mehrere Ausdrůcke aus einem Gliede weg, und ſetzet ſolche mit verånderten Zeichen in das andere; ſo kömmt allemal wieder eine Gleichung zum Vorſcheine.

Es ſey z. B. $aex+bce=bnx-bde$; ſo iſt auch

$$bce+bde=bnx-aex$$

Sind in einer Gleichung, wie in dieſer

$$bce+bde=bnx-aex$$

alle unbekannten Ausdrůcke auf einer, und alle bekannten auf der andern Seite des Gleichungszeichens; ſo iſt das unbekannte Glied allemal ein Product aus einem unbekannten Factor x, und einem bekannten, wie bn — ae.

Dividiret man alſo beyde Glieder durch den bekannten Factor; ſo wird auch der Werth von x bekannt.

So weil $bce+bde=bnx-aex$ oder
$bce+bde=(bn-ae)x$; ſo iſt auch

$$\frac{bce+bde}{bn-ae}=x.$$

135. Den Werth der Unbekannten aus einer gegebenen Gleichung durch lauter bekannte Ausdrůcke beſtimmen, heißt die Gleichung auflöſen.

Es wird alſo jede Gleichung, die nur eine Unbekannte enthålt, aufgelöſet: wenn man

1tens alle unbekannten Ausdrůcke von den Brůchen befreyet,

2tens

2tens ſolche allein auf eine Seite des Gleichungszeichens bringt, und

3tens beyde Glieder noch dividiret, durch was die Unbekannte multipliciret iſt.

Es ſey $\frac{ad}{x} + b = c + \frac{deh}{nx}$; ſo iſt

1tens $ad + bx = cx + \frac{deh}{n}$

2tens $bx - cx = \frac{deh}{n} - ad$

3tens $x = \frac{deh}{n(b-c)} - \frac{ad}{b-c}$ oder

$x = \frac{deh - adn}{n(b-c)}$.

Es ſey $\frac{ax}{d} + \frac{x}{d} = \frac{2x}{d} + n$; ſo iſt

1tens $ax + x = 2x + dn$

2tens $ax + x - 2x = dn$ oder

$ax - x = dn$

3tens $x = \frac{dn}{a-1}$.

Es ſey $\frac{100}{x} - 20 = 80$; ſo iſt

1tens $100 - 20x = 80x$

2tens $100 = 80x + 20x$ oder

$100 = 100x$

3tens $x = \frac{100}{100} = 1$.

Es ſey $\frac{3x + 2}{2x - 1} = 7$; ſo iſt

1tens $3x + 2 = 14x - 7$

2tens $2 + 7 = 14x - 3x$ oder
$11x = 9$

3tens $x = \frac{9}{11}$.

136. **Wenn nun eine Aufgabe nur eine unbekannte Größe zu ſuchen giebt; ſo drücket man dieſe Unbekannte durch x und die Bedingung der Aufgabe durch eine Gleichung aus, und ſuchet ſodann den Werth dieſer Unbekannten, wie zuvor.**

Es koſten 5 Klaftern 8 fl: wieviel koſten 12 Klaftern?

Dieſe 12 Klaftern koſten x fl; alſo koſtet 1 Klafter nur den 12ten Theil von x fl; folglich iſt $\frac{x}{12}$ fl. der Werth von einer Klafter: und da 5 Klaftern 8 fl. koſten; ſo iſt $\frac{8}{5}$ fl. auch der Werth von einer Klafter; folglich iſt

$$\frac{x}{12} = \frac{8}{5} \text{ und}$$

$$x = \frac{8 \times 12}{5} = \frac{96}{5} = 19\tfrac{1}{5} \text{ fl.}$$

Es haben 250 Mann auf 9 Tage hinlängliche Lebensmittel: auf wieviel Tage werden dieſe Lebensmittel für 50 Mann hinreichen?

Auf x Tage.

Die 250 Mann verzehren in 9 Tagen 9mal 250 oder 2250 Tagesportionen: und die 50 Mann verzehren in

in x Tagen xmal 50 oder 50x Tagesportionen. Dieſe Tagesportionen aber ſind in beeden Fällen dieſelben;

alſo iſt $50x = 2250$ und

$$x = \frac{2250}{50} = \frac{225}{5} = 45.$$

Es ſey die Zahl zu ſuchen, welche ſo beſchaffen iſt, daß ihre Hälfte, ihr Drittel, und ihr Viertel zuſammen-addirt, eine Summe geben, die um 3 größer iſt als die Zahl ſelbſt.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte, $\frac{x}{3}$ ihr Drittel, $\frac{x}{4}$ ihr Viertel, und nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 3, \text{ folglich}$$

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = 2x + 6$$

$$3x + 2x + \frac{3x}{2} = 6x + 18$$

$$6x + 4x + 3x = 12x + 36$$

$$13x - 12x = 36 \text{ oder}$$

$$x = 36.$$

Es ſey die Zahl zu ſuchen, die ſo beſchaffen iſt, daß, wenn man 5 zu $\frac{3}{4}$ davon addirt, ebenſoviel heraus-komme, als wenn man $\frac{7}{8}$ davon von 234 abzieht.

Die Zahl ſey x; ſo iſt

$\frac{3}{4}$ davon $= \frac{3x}{4}$, und $\frac{7}{8}$ davon $= \frac{7x}{8}$,

 alſo

alſo vermög der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{3x}{4} + 5 = 234 - \frac{7x}{8}$$

$$3x + 20 = 936 - \frac{7x}{2}$$

$$6x + 40 = 1872 - 7x$$

$$6x + 7x = 1872 - 40$$

$$13x = 1832$$

$$x = \frac{1832}{13} = 140\frac{12}{13}.$$

137. Wenn die Aufgabe mehrere Unbekannten zu ſuchen giebt, und ebenſoviel verſchiedene Bedingungen enthält; ſo nennet man eine der Unbekannten x, drücket jede andere nach einer aus den gegebenen Bedingungen abermal vermittelſt x aus, bringt endlich die noch übrige Bedingung in eine Gleichung, und verfährt, wie folgt.

Theile 20 in zween Theile, daß einer um 4 größer ſey, als der andere.

Hier ſind zwo Unbekannten, die beyden Theile, und auch zwo Bedingungen.

Die 1ſte Bedingung iſt, daß eine Unbekannte um 4 größer ſey, als die andere, und die 2te, daß beede Unbekannten 20 ausmachen ſollen.

Die kleinere aus den Unbekannten ſey x; ſo iſt nach der 1ten Bedingung die größere x + 4, und nach der 2ten Bedingung

$$x + x + 4 = 20, \text{ alſo}$$

$$x + x = 20 - 4$$

$$2x = 16$$

$$x = 8 \text{ und}$$

$$x + 4 = 12.$$

Es

Es iſt gleichgültig, welche Bedingung man zuerſt ausdrücke, wenn man nur alle ausdrückt, nicht eine weglaͤßt um eine andere zweymal auszudrücken. Hier hätten wir auch ſo verfahren können. Es ſey die kleinere der Unbekannten x; ſo iſt nach der 2ten Bedingung die größere 20 — x, und nach der 1ten Bedingung

$$20 - x = x + 4, \text{ alſo}$$
$$20 - 4 = x + x$$
$$16 = 2x$$
$$x = \frac{16}{2} = 8 \text{ und}$$
$$20 - x = 12.$$

Ebenſo iſt es gleichgültig, welche aus den Unbekannten man x nenne. Denn iſt hier die größere x; ſo iſt nach der 1ten Bedingung die kleinere x — 4, und nach der 2ten Bedingung $x + x - 4 = 20$, alſo

$$x + x = 20 + 4$$
$$2x = 24$$
$$x = 12 \text{ und}$$
$$x - 4 = 8.$$

Oder iſt die größere wieder x; ſo iſt nach der 2ten Bedingung die kleinere 20 — x, und nach der erſten

$$x = 20 - x + 4$$
$$x + x = 20 + 4$$
$$2x = 24$$
$$x = 12 \text{ und}$$
$$20 - x = 8.$$

Da es gleich gilt, welche aus den Unbekannten man x nenne, und welche Bedingung man zuerſt ausdrücke; ſo heißt es die Zeit verderben, wenn man ſich lange beſinnt, was x heiſſen, und bey welcher Bedingung man den Anfang machen ſoll.

Der Anfänger wird wohl thun, wenn er in folgenden Beyſpielen von mehr Unbekannten ſich zu üben allemal

wieder eine andere Unbekannte x nennt, und auch die Bedingungen in einer andern Ordnung auszudrücken ſucht.

Ein Vater hinterläßt eine Wittwe, 2 Söhne und 3 Töchter nebſt 33000 fl: nach ſeinem Teſtamente ſoll die Mutter 2mal ſoviel als ein Sohn, und ein Sohn 2mal ſoviel als eine Tochter bekommen: wieviel kömmt jedem zum Theile?

Eine Tochter bekomme x fl; ſo bekommt
ein Sohn . . . . . 2x fl.

die Mutter. . . . . 4x fl.
zween Söhne. . . . 4x fl.
drey Töchter . . . . 3x fl.
alle zuſammen . . 11x fl.; folglich iſt

$$11x = 33000 \text{ und}$$

$$x = \frac{33000}{11} = 3000.$$

Alſo erhält jede Tochter 3000 fl.
jeder Sohn 6000 fl. und
die Mutter 12000 fl.

Drey Brüder theilen ihr mütterliches Vermögen alſo untereinander: der 1te nimmt 1200 fl. weniger als die Hälfte, der 2te 800 fl. weniger als ein Drittel, und der 3te 400 fl. weniger als ein Viertel des ganzen Vermögens. Wie groß iſt das Vermögen und wieviel kömmt jedem zu Theile? Das ganze Vermögen ſey x fl; ſo bekömmt

der 1te $\frac{x}{2} - 1200$ fl.

der 2te $\frac{x}{3} - 800$ fl.

der 3te $\frac{x}{4} - 400$ fl.

alle

alle 3 zuſammen $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2400$ fl; alſo iſt

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2400 = x$$

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - 4800 = 2x$$

$$3x + 2x + \frac{3x}{2} - 14400 = 6x$$

$$6x + 4x + 3x - 28800 = 12x$$
$$13x - 12x = 28800$$
$$x = 28800;$$

folglich erhält

der 1te $\frac{x}{2} - 1200 = 14400 - 1200$
$= 13200$ fl.

der 2te $\frac{x}{3} - 800 = 9600 - 800$
$= 8800$ fl.

der 3te $\frac{x}{4} - 400 = 7200 - 400$
$= 6800$ fl.

Suche die Zahl, welche zu ihrer Hälfte addirt ebenſoviel über 60 giebt, als die Zahl unter 50 iſt.

Die Zahl ſey x; ſo iſt $x + \frac{x}{2}$ über 60, und zwar um $x + \frac{x}{2} - 60$: und x iſt um $50 - x$ unter 50.

Alſo iſt $x + \frac{x}{2} - 60 = 50 - x$

$$2x + x - 120 = 100 - 2x$$
$$2x + x + 2x = 100 + 120$$
$$5x = 220$$
$$x = \frac{220}{5} = 44$$

Suche die Zahl, welche mit 6 multiplicirt ebenſoviel unter 80, als die Zahl ſelbſt unter 20 iſt.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt 6x um 80 — 6x unter 80 und x um 20 — x unter 20;

alſo
$$20 - x = 80 - 6x$$
$$6x - x = 80 - 20$$
$$5x = 60$$
$$x = 12.$$

Suche die Zahl, durch welche 100 dividirt ſo oft in 10 enthalten, als die Zahl ſelbſt unter 22 iſt.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt $\frac{100}{x}$ in 10

$10 : \frac{100}{x} = \frac{10x}{100} = \frac{x}{10}$ mal enthalten;

und x iſt um 22 — x unter 22;

alſo
$$\frac{x}{10} = 22 - x$$
$$x = 220 - 10x$$
$$11x = 220$$
$$x = \frac{220}{11} = 20$$

Zertheile 48 in zween Theile, daß, wenn man den größern durch 7, und den kleinern durch 5 dividiret, die Summe dieſer Quotienten 8 ausmache.

Der

Der kleinere ſey x; ſo iſt der größere 48 — x, alſo

$$\frac{48-x}{7} + \frac{x}{5} = 8$$

$$48-x + \frac{7x}{5} = 56$$

$$240-5x + 7x = 280$$

$$7x-5x = 280 - 240$$

$$2x = 40$$

$$x = 20 \text{ und}$$

$$48 - x = 28.$$

Zertheile 23 in zween Theile, daß einer 30mal größer ſey, als der andere.

Der kleinere ſey x; ſo iſt der größere 30x, und

$$30x + x = 23$$

$$31x = 23$$

$$x = \frac{23}{31} \text{ und}$$

$$30x = 22\frac{8}{31}.$$

Suche die zwo Zahlen, deren Summe 24 und deren Unterſcheid 5 ausmacht.

Die kleinere ſey x; ſo iſt die größere x + 5, und

$$x + x + 5 = 24$$

$$2x = 19$$

$$x = 9\tfrac{1}{2} \text{ und}$$

$$x + 5 = 14\tfrac{1}{2}.$$

Suche zwo Zahlen, deren Summe a und deren Unterſcheid b ausmacht.

Die kleinere ſey x; ſo iſt die größere x + b, und

$$x + x + b = a$$
$$x + x = a - b$$
$$2x = a - b$$
$$x = \frac{a-b}{2} \text{ und}$$
$$x + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Man erhält alſo die kleinere aus was immer für zwoen Zahlen, wenn man ihren halben Unterſcheid von ihrer halben Summe abzieht, und die größere, wenn man ihren halben Unterſcheid zu ihrer halben Summe addirt.

Es ſey z. B. die Summe 100, ihr Unterſcheid 7; ſo iſt die größere $50 + 3\frac{1}{2} = 53\frac{1}{2}$ und die kleinere $50 - 3\frac{1}{2} = 46\frac{1}{2}$.

Ein Wirth hat zweyerley Weine, einen, wovon die Maß 24 kr., und einen, wovon die Maaß 12 kr. koſtet. Nun wird eine Maaß um 16 kr. begehrt. Man fragt, wieviel er vom 12 kr. und wieviel er vom 24 kr. Wein nehmen ſoll, daß er eine Maaß für 16 kr. erhalte.

Hier ſind zwo Bedingungen. Der Wirth ſoll eine Maaß, und dieſe für 16 kr. hergeben.

Er gebe von dem 24 kr. Wein x Maaß; ſo muß er nach der 1ten Bedingung vom 12 kr. Wein 1 — x Maaß geben.

Dieſe x Maaß vom 24 kr. Wein und die 1 — x Maaß vom 12 kr. Wein ſollen nach der 2ten Bedingung 16 kr. werth ſeyn. Allein, wenn eine Maaß 24 kr. gilt; ſo gelten 2 Maaß 2mal 24 kr., 3 Maaß 3mal 24 kr., $\frac{1}{3}$ Maaß $\frac{1}{3}$mal 24 kr., und x Maaß xmal 24 kr., oder 24 x kr.: ebenſo gelten 1 — x Maaß vom 12 kr. Wein $(1-x) \times 12$ kr. $= 12 - 12x$ kr.; daher iſt

$$24x + 12 - 12x = 16$$
$$12x = 16 - 12$$
$$12x = 4$$
$$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},\ \text{und}$$
$$1 - x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ein Wirth hat einen a kr. und einen b kr. Wein, und ſoll eine Maaß hergeben die c kr. gelte: Wieviel muß er vom a kr. und wieviel vom b kr. Wein zu dieſer Maaße nehmen?

Er nehme vom a kr. Wein x Maaß; ſo muß er eine Maaß zu bekommen, vom b kr. Wein $1 - x$ Maaß nehmen. Nun gelten die x Maaß vom a kr. Wein ax kr., und die $1 - x$ Maaß vom b kr. Wein $(1 - x \times b$ kr $= b - bx$ kr.; dieſe beeden Werthe ſollen c kr. ausmachen. Alſo iſt

$$ax + b - bx = c$$
$$ax - bx = c - b$$
$$x = \frac{c-b}{a-b},\ \text{und}$$
$$1 - x = 1 - \frac{c+b}{a-b} = \frac{a - b - c + b}{a - b} = \frac{a - c}{a - b}.$$

Man erhält alſo die Anzahl der Maaßen, welche man von jedem der vorhandenen Weine zur Vermiſchung nehmen ſoll: wenn man den Unterſcheid der Werthe beeder andern Weine durch den Unterſcheid der Werthe der vorhandenen Weine dividiret.

Weil $x = \frac{c-b}{a-b}$, und $1 - x = \frac{a-c}{a-b}$; ſo muß c größer, als b und kleiner, als a ſeyn; ſonſt würde man wider die Vorausſetzung für x oder $1 - x$ einen verneinenden Werth erhalten.

Iſt

Iſt a = 18, b = 12 und c = 16; ſo wird nach dieſer Regel

$$x = \frac{16-12}{18-12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ und}$$

$$1 - x = \frac{18-16}{18-12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Es ſey aus einem 20 kr. und 12 kr. Wein eine Vermiſchung von 30 Maaß 15 kr. Wein zu machen.

Man nehme vom 20 kr. Wein x Maaß; ſo ſind um 30 Maaß zu bekommen, vom 12 kr. Wein 30 — x Maaß zu nehmen.

Die x Maaß vom 20 kr. Wein gelten 20 x kr., die 30 — x Maaß vom 12 kr. Wein $(30 - x) \times 12$ kr. $= 360 - 12x$ kr., und die 30 Maaß vom 15 kr. Wein 450 kr; alſo iſt

$$20x + 360 - 12x = 450$$
$$8x = 450 - 360$$
$$8x = 90$$
$$x = \frac{90}{8} = 11\tfrac{1}{4} \text{ und}$$
$$30 - x = 18\tfrac{3}{4}$$

Man ſoll aus einem a kr. und einem b kr. Wein eine Vermiſchung von n Maaß c kr. Wein machen.

Wir nehmen vom a kr. Wein x Maaß, die ax kr. gelten; folglich ſind vom b kr. Wein noch n — x Maaß zu nehmen, welche $(n - x) \times b$ kr. $= bn - bx$ kr. werth ſind.

Dieſe x Maaß und n — x Maaß aber ſollen cn kr. koſten; alſo iſt

$$ax + bn - bx = cn$$
$$ax - bx = cn - bn$$
$$x = \frac{cn - bn}{a - b} = n\left(\frac{c - b}{a - b}\right) \text{ und}$$
$$n - x$$

$$n-x = n - \frac{cn+bn}{a-b} = \frac{an-bn-cn+bn}{a-b}$$

$$= \frac{an-cn}{a-b} = n\left(\frac{a-c}{a-b}\right)$$

Wenn man alſo mehrere Maaßen des vermiſchten Weines verlanget; ſo muß man die nach obiger Regel für x und 1 — x erhaltenen Werthe noch mit der Anzahl der Maaßen, die man verlangt, multipliciren.

Es ſey aus einem 14löthigen und einem 9löthigen Silber eine Vermiſchung 11löthiges Silbers zu machen. Man nehme vom 14löthigen x Mark; ſo ſind, um eine Mark zu bekommen, vom 9löthigen 1 — x Mark zu nehmen.

Nun weil eine Mark vom 14löthigen 14 Loth fein Silber enthält; ſo enthalten x Mark vom 14löthigen 14 x Loth fein Silber, und ebenſo 1 — x Mark vom 9löthigen $(1-x)\times 9 = 9 - 9x$ Loth fein Silber.

Dieſe x Mark vom 14löthigen und (1 — x) Mark vom 9löthigen ſollen eine Mark ausmachen, welche 11 Loth fein Silber enthält. Dahero iſt

$$14x + 9 - 9x = 11$$
$$14x - 9x = 11 - 9$$
$$5x = 2$$
$$x = \frac{2}{5} \text{ und}$$
$$1 - x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Es ſey aus einem a löthigen und b löthigen Silber eine Mark c löthiges zu machen. Man nehme vom a löthigen x Mark, und vom b löthigen 1 — x Mark; ſo enthalten die x Mark vom a löthigen ax Loth fein Silber, und die 1 — x Mark vom b löthigen $(1-x)\times b = b - bx$ Loth

Loth fein Silber. Dieſes feine Silber aber zuſammen genommen ſoll c Loth ausmachen; alſo iſt

$$ax + b - bx = c$$
$$ax - bx = c - b$$
$$x = \frac{c-b}{a-b} \text{ und}$$

$$1 - x = 1 - \frac{c+b}{a-b} = \frac{a-b-c+b}{a-b} = \frac{a-c}{a-b}$$

Man erhält alſo die Marken, welche von jedem Silber zu nehmen ſind, wenn man den Unterſcheid der Lothe beyder andern Silber durch den Unterſcheid der Lothe beyder vorhandenen Silber dividiret.

Wird eine Vermiſchung von n Mark verlangt; ſo wird

$$x = n\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \text{ und}$$
$$n - x = n\left(\frac{a-c}{a-b}\right)$$

Alſo ſind in dieſem Falle jene Quotienten noch mit n zu multipliciren.

Jeder Körper verliert im Waſſer von ſeiner Schwere ſo viel, als das Waſſer wiegt, deſſen Raum er einnimmt. Vorausgeſetzt, es verliere das Gold im Waſſer $\frac{1}{18}$, und das Kupfer $\frac{1}{9}$ von ſeiner Schwere; ſo fragt man, wie viel Loth, eine aus Gold und Kupfer zuſammengeſchmelzte Maſſe, die 72 Loth auſſer dem Waſſer und 65 Loth in demſelben wiegt, von jedem dieſer Metallen enthalte.

Dieſe Maſſe enthalte x Loth Gold; ſo enthält ſie 72 — x Loth Kupfer. Nun verliert im Waſſer das Gold $\frac{x}{18}$ Loth, das Kupfer $\frac{72-x}{9}$ Loth, und die ganze Maſſe $72 - 65 = 7$ Loth;

al-

alſo iſt $\frac{x}{18} + \frac{72-x}{9} = 7$

$$\frac{x}{2} + 72 - x = 63$$
$$x + 144 - 2x = 126$$
$$x = 144 - 126$$
$$x = 18 \quad \text{und}$$
$$72 - x = 72 - 18 = 54.$$

Ein gewiſſes Metall verliert im Waſſer von ſeiner Schwere $\frac{1}{q}$ und ein anderes $\frac{1}{n}$. Nun haben wir eine aus dieſen zwoen Sorten Metallen zuſammengeſchmelzte Maſſe von a Loth, die im Waſſer c Loth verliert: man fragt, wieviel Loth dieſe Maſſe von jeder Sorte enthalte. Von der 1ten Sorte enthalte dieſe Maſſe x Loth; ſo wird ſie von der andern a — x Loth enthalten.

Die x Loth von der 1ten Sorte verlieren im Waſſer $\frac{x}{q}$, und jene a — x Loth von der 2ten Sorte verlieren $\frac{a-x}{n}$ Loth; alſo iſt

$$\frac{x}{q} + \frac{a-x}{n} = c$$
$$x + \frac{aq - qx}{n} = cq$$
$$nx + aq - qx = cnq$$
$$nx - qx = cnq - aq$$
$$x = \frac{cnq-aq}{n-q} \quad \text{und}$$

$$a - x = a - \frac{cnq+aq}{n-q} = \frac{an-aq-cnq+aq}{n-q}$$
$$= \frac{an-cnq}{n-q}.$$

Ein

Ein Wechsler hat zweyerley Münzen, von der 1ten Sorte gelten 12 Stücke, und von der 2ten 10 Stücke einen Gulden. Nun will einer 11 Stücke um einen Gulden haben. Wieviel muß der Wechsler von jeder Sorte geben?

Er gebe von der 1ten Sorte x Stücke; ſo muß er von der 2ten Sorte 11 — x Stücke geben. Nun gelten von der 1ten Sorte 12 Stücke einen fl, alſo 1 Stück $\frac{1}{12}$ fl, und x Stücke x mal $\frac{1}{12}$ fl. oder $\frac{x}{12}$ fl.; und weil von der 2ten Sorte 10 Stücke 1 fl. ausmachen; ſo macht 1 Stück $\frac{1}{10}$ fl. und 11 — x Stücke 11 — x mal $\frac{1}{10}$ fl. oder $\frac{11-x}{10}$ fl. Daher iſt

$$\frac{x}{12} + \frac{11-x}{10} = 1$$

$$\frac{10x}{12} + 11 - x = 10$$

$$10x + 132 - 12x = 120$$

$$12x - 10x = 132 - 120$$

$$2x = 12$$

$$x = 6 \text{ und}$$

$$11 - x = 5.$$

Es habe nun ein Wechsler eine Münzſorte, wovon a Stücke, und eine andere, wovon b Stücke einen Ducaten ausmachen, und es werden c Stücke um einen Ducaten verlangt: wieviel ſoll er von jeder Sorte geben?

Er gebe x Stücke von der 1ten Sorte, alſo c — x Stücke von der 2ten; ſo gelten die x Stücke von der 1ten Sorte $\frac{x}{a}$ Ducaten, und die c — x Stücke von der 2ten Sorte $\frac{c-x}{b}$ Ducaten. Dieſe Werthe aber ſollen einen Ducaten ausmachen; alſo iſt $\frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$$

$$x + \frac{ac-ax}{b} = a$$

$$bx + ac - ax = ab$$

$$ax - bx = ac - ab$$

$$x = \frac{ac-ab}{a-b} = a\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \text{ und}$$

$$c - x = c - \frac{ac+ab}{a-b} = \frac{ac-bc-ac+ab}{a-b}$$

$$= \frac{ab-bc}{a-b} = b\left(\frac{a-c}{a-b}\right).$$

Dieſe gefundenen Werthe zeigen, daß c größer als b und kleiner als a ſeyn müſſe, und geben uns dieſe Regel.

Man erhält die Anzahl der Stücke, die man von jeder Sorte geben ſoll, wenn man den Unterſcheid der Stücke der zwo andern Sorten, durch den Unterſcheid der Stücke der zwo vorhandenen dividiret, und den Quotienten mit der Anzahl der Stücke jener Sorte multipliciret.

Im vorigen Beyſpiele giebt man nach dieſer Regel von der erſten Sorte

$$\left(\frac{11-10}{12-10}\right) \times 12 = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \text{ und}$$

von der zwoten Sorte

$$\left(\frac{12-11}{12-10}\right) \times 10 = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$

Ich habe Tuch gekauft, jede 3 Ellen um 11 fl. und wieder alles, jede 4 Ellen um 17 fl. verkauft, und daran 126 fl. gewonnen: wieviel waren es Ellen?

Es waren x Ellen. Jede 3 Ellen koſtet mich 11 fl. folglich jede Elle $\frac{11}{3}$ fl., alſo x Ellen $\frac{11x}{3}$ fl. Für jede 4 Ellen habe ich 17 fl., alſo für jede Elle $\frac{17}{4}$ fl. und für x Ellen $\frac{17x}{4}$ fl. eingenommen. Folglich iſt der Gewinn $\frac{17x}{4} - \frac{11x}{3}$ fl., und daher

$$\frac{17x}{4} - \frac{11x}{3} = 126$$
$$17x - \frac{44x}{3} = 504$$
$$51x - 44x = 1512$$
$$7x = 1512$$
$$x = 216.$$

Einer kauft Pferde, und giebt um 4 Stücke ebenſoviel über 500 fl., als er um 6 Stücke über 800 fl. giebt. Wie theuer kömmt das Stück zu ſtehen?

Ein Pferd koſte x fl.; ſo gelten 4 Pferde 4 x fl., alſo um 4x — 500 fl. mehr als 500 fl.; und 6 Pferde koſten 6x fl., alſo um 6x — 800 fl. mehr als 800 fl. Dieſe zween Unterſcheide aber ſollen gleich ſeyn; alſo iſt

$$4x - 500 = 6x - 800$$
$$6x - 4x = 800 - 500$$
$$2x = 300$$
$$x = 150 \text{ fl.}$$

Drey haben eine gewiſſe Anzahl Gulden; der 1te hat 20 fl.; der 1te und der 2te haben zuſammen 3mal ſoviel als der 3te; der 2te und der 3te aber 4mal ſoviel, als der 1te: wieviel hat der 2te und der 3te?

Die Anzahl der Gulden des 2ten ſey x; ſo haben der 1te und der 2te 20 + x fl., alſo der 3te

20+x

$\frac{20 + x}{3}$ fl., und der 2te und der 3te $x + \frac{20+x}{3}$ fl. Dieſes aber ſoll 4mal ſoviel ſeyn, als die Gulden des 1ten.

Daher iſt $x + \frac{20 + x}{3} = 4 \times 20$

$$3x + 20 + x = 12 \times 20 = 240$$
$$4x = 240 - 20$$
$$4x = 220$$
$$x = 55 \text{ und}$$
$$\frac{20 + x}{3} = \frac{20+55}{3} = \frac{75}{3} = 25.$$

Mehrere Kinder theilten die väterliche Verlaſſenſchaft alſo untereinander:

Das 1te nahm 1000 fl. mehr den 5ten Theil des Uebrigen; das 2te nahm 2000 fl. mehr den 5ten Theil des Uebrigen; das 3te nahm 3000 fl. mehr den 5ten Theil des Uebrigen; u. ſ. f. bis auf das letzte, welchem der letzte Reſt zu Theile kam. Nun fügte es ſich, daß alle gleichviel bekamen. Wie groß war die Verlaſſenſchaft, wieviel waren der Kinder, und wieviel bekam jedes?

Wenn die ganze Erbſchaft bekannt wäre; ſo würden wir bald den Antheil eines jeden ſammt der Anzahl der Kinder wiſſen. Es ſey alſo die Erbſchaft x fl.; ſo bekömmt das 1te Kind $1000 + \frac{x-1000}{5}$ fl. und das 2te Kind 2000 fl. mehr den 5ten Theil des Uebrigen: allein das Uebrige iſt $x - 1000 - \frac{x+1000}{5} - 2000$ $= x - 3000 - \frac{x+1000}{5}$, alſo der 5te Theil davon $\frac{x}{5} - \frac{3000}{5} - \frac{x+1000}{25}$; folglich bekömmt in

 allem

allem das 2te Kind $2000 + \frac{x}{5} - \frac{3000}{5} - \frac{x+1000}{25}$:
allein alle Kinder bekommen gleichviel; alſo iſt

$$1000 + \frac{x}{5} - \frac{1000}{5} = 2000 + \frac{x}{5} - \frac{3000}{5} - \frac{x}{25} + \frac{1000}{25},$$

$$-\frac{1000}{5} = 1000 - \frac{3000}{5} - \frac{x}{25} + \frac{1000}{25}$$

$$-200 = 1000 - 600 - \frac{x}{25} + \frac{200}{5}$$

$$\frac{x}{25} = 400 + 200 + 40$$

$$x = 640 \times 25 = 3200 \times 5 = 16000.$$

Alſo bekömmt das erſte Kind

$$1000 + \frac{15000}{5} = 4000 \text{ fl.}$$

das 2te $2000 + \frac{10000}{5} = 4000$ fl.

das 3te $3000 + \frac{5000}{5} = 4000$ fl.

und endlich das letzte den Reſt 4000 fl.

Es nehme nun das 1te Kind a fl. mehr $\frac{1}{n}$ des Uebrigen; das 2te 2a fl. mehr $\frac{1}{n}$ des Uebrigen; das 3te 3a fl. mehr $\frac{1}{n}$ des Uebrigen; das 4te 4a fl. mehr $\frac{1}{n}$ des Uebrigen u. ſ. f. bis alle Kinder einen Theil haben; und es bekommen wieder alle gleichviel. Man ver-

verlangt die Erbſchaft, die Anzahl der Kinder, und den Antheil eines jeden zu wiſſen.

Es ſey die Erbſchaft x fl.; ſo bekömmt das 1te Kind $a + \frac{x-a}{n}$ fl. und das 2te $2a + \frac{x - 3a - \frac{x+a}{n}}{n}$

$$= 2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x+a}{nn} \text{ fl.};$$ alſo iſt

$$a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n} = 2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$$

$$-\frac{a}{n} = a - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$$

$$\frac{x}{nn} = a - \frac{3a}{n} + \frac{a}{n} + \frac{a}{nn}$$

$$\frac{x}{nn} = a - \frac{2a}{n} + \frac{a}{nn}$$

$x = ann - 2an + a$ oder

$x = a(nn - 2n + 1)$ oder

$x = a(n - 1)(n - 1)$.

Alſo bekömmt das 1te oder jedes Kind

$$a + \frac{ann - 2an + a - a}{n} = \frac{an + ann - 2an}{n} = \frac{ann - an}{n}$$

$= an - a = a(n - 1)$;

und die Anzahl der Kinder iſt $\frac{a(n-1)(n-1)}{a(n-1)} = n - 1$.

Es ſey $a = 100$ und $n = 10$; ſo iſt die Erbſchaft $a(n-1)(n-1) = 100 \times 9 \times 9 = 8100$, der Antheil eines jeden Kindes $a(n-1) = 100 \times 9 = 900$, und die Anzahl der Kinder $n - 1 = 9$.

138 Bey mehrern Aufgaben wird es ſchwer die gegebenen Bedingungen durch eine einzelne Unbekannte aus-

zudrücken. In dieſem Falle drücken wir jede Unbekannte durch einen beſondern Buchſtaben x, y, z oder u, und jede Bedingung wieder durch eine beſondere Gleichung aus. Giebt alſo die Aufgabe ebenſoviel verſchiedene Bedingungen an die Hand, als Unbekannte zu ſuchen ſind; ſo erhalten wir auch ebenſoviele Gleichungen.

Es ſeyen zwo Gleichungen einer Aufgabe von zwoen Unbekannten

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

aufzulöſen.

Suchen wir den Werth von x aus der erſten und aus der zwoten Gleichung; ſo erhalten wir

$$x = a - y \text{ und}$$
$$x = b + y$$

zween Werthe, $a - y$ und $b + y$ von derſelben Unbekannten x, welche beede einerley bedeuten, und folglich eine dritte Gleichung geben

$$a - y = b + y,$$

die nur noch eine Unbekannte y enthält.

Aus dieſer Gleichung wird ſodann die Unbekannte y, wie oben gefunden, und auch der Werth von der andern Unbekannten x entdeckt, ſobald der Werth von y anſtatt y in den Werth von x geſetzet wird

Es ſeyen die zwo Zahlen zu ſuchen, deren Summe a und deren Unterſcheid b iſt.

Die größere ſey x und die kleinere y; ſo iſt

$$x + y = a \text{ und}$$
$$x - y = b;$$

alſo aus der 1ten Gleichung $x = a - y$
und aus der 2ten $x = b + y$,
folglich $a - y = b + y$

$$a = 2y + b$$
$$a - b = 2y$$
$$y = \frac{a - b}{2} \text{ und}$$
$$x = b + y = b + \frac{a - b}{2} = \frac{2b + a - b}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Zween

Zween haben jeder eine gewiſſe Anzahl Dukaten. Gäbe der 1te dem 2ten 3 Dukaten; ſo hätte der 1te noch dreymal ſoviel, als der 2te: und gäbe der 2te dem 1ten 2 Dukaten; ſo hätte der 1te 4mal ſoviel, als der 2te. Wie viel hat ein jeder Dukaten? Der 1te habe x, der 2te y Dukaten. Wenn nun der 1te dem 2ten 3 Dukaten giebt; ſo bleiben dem 1ten noch $x - 3$, und der 2te wird $y + 3$ haben: und weil in dieſem Falle der 1te noch 3mal ſoviel, als der 2te hat; ſo iſt

$$x - 3 = 3y + 9.$$

Wenn ferner der 2te dem 1ten 2 Dukaten giebt; ſo hat der 1te $x + 2$ und der 2te $y - 2$: und in dieſem Falle ſoll der 1te 4mal ſoviel haben, als der 2te;

alſo iſt $x + 2 = 4y - 8.$

Aus der 1ten Gleichung iſt $x = 3y + 12$ und
aus der 2ten $x = 4y - 10$; alſo iſt

$$4y - 10 = 3y + 12$$
$$4y - 3y = 12 + 10$$
$$y = 22 \text{ und}$$
$$x = 3y + 12 = 66 + 12 = 78.$$

Zween haben jeder eine gewiſſe Anzahl Gulden. Giebt der 1te dem 2ten a fl; ſo hat jener noch nmal ſoviel, als dieſer: und giebt der 2te dem 1ten b fl. ſo hat dieſer mmal ſoviel, als jener. Wieviel hat ein jeder Gulden?

Der 1te habe x fl., und der 2te y fl.; ſo hat im 1ten Falle der 1te $x - a$ fl, und der 2te $y + a$ fl.;

alſo iſt $x - a = n(y + a)$.

Im 2ten Falle hat der 1te $x + b$ und der 2te $y - b$;
alſo iſt $x + b = m(y - b)$.

Aus der 1ten Gleichung iſt $x = ny + na + a$, und
aus der 2ten $x = my - mb - b$; alſo iſt

$$my - mb - b = ny + na + a$$
$$my - ny = na + a + mb + b$$

$$y = \frac{na+a+mb+b}{m-n} = \frac{(n+1)a+(m+1)b}{m-n} \text{ und}$$

$$x = ny+na+a = \frac{nna+na+mnb+nb}{m-n} + na + a$$

$$= \frac{mna+ma+mnb+nb}{m-n} = \frac{(mn+m)a+(mn+n)b}{m-n}.$$

Im vorigen Beyſpiele iſt $a=3$, $n=3$, $b=2$, $m=4$

alſo $y = \frac{(n+1)a+(m+1)b}{m-n} = \frac{12+10}{1} = 22$ und

$$x = \frac{(mn+m)a+(mn+n)b}{m-n} = \frac{48+30}{1} = 78.$$

Es ſeyen ferner die Bedingungen folgende:

Wenn der 1te dem 2ten 1 giebt; ſo hat der 2te 2mal ſoviel, als der 1te; und giebt der 2te dem 1ten 1; ſo hat der 1te 3mal ſoviel, als der 2te: ſo wird in dieſem Falle $a = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $m = 3$; alſo

$$y = \frac{(n+1)a+(m+1)b}{m-n} = \frac{\frac{3}{2}+4}{3-\frac{1}{2}} = \frac{11}{2} : \frac{5}{2}$$

$$= \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2\tfrac{1}{5}, \text{ und } x = \frac{(mn+m)a+(mn+n)b}{m-n}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{13}{2} : \frac{5}{2} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} = 2\tfrac{3}{5}.$$

Zween ſind 100 fl. ſchuldig. Wenn der 1te dem 2ten $\frac{2}{3}$ von ſeinem Gelde gäbe; ſo könnte der 2te die Schuld allein bezahlen: und wenn der 2te dem 1ten $\frac{3}{4}$ von dem ſeinigen gäbe; ſo könnte auch dieſer die Schuld allein bezahlen.

Wie-

Wieviel hat ein jeder Gulden?

Der 1te habe x fl, der zweyte y fl.; ſo iſt

nach der erſten Bedingung $y + \frac{2x}{3} = 100$ und

nach der 2ten $x + \frac{3y}{4} = 100$, alſo

aus der 1ten Gleichung $y = 100 - \frac{2x}{3}$ und

aus der 2ten $4x + 3y = 400$

$$3y = 400 - 4x$$

$$y = \frac{400 - 4x}{3}, \text{folglich}$$

$$100 - \frac{2x}{3} = \frac{400 - 4x}{3}$$

$$300 - 2x = 400 - 4x$$

$$4x - 2x = 400 - 300$$

$$2x = 100$$

$$x = 50 \text{ und}$$

$$y = 100 - \frac{2x}{3} = 100 - \frac{100}{3} = 100 - 33\tfrac{1}{3} = 66\tfrac{2}{3}.$$

Zween haben jeder eine gewiſſe Anzahl Gulden. Das Geld des 1ten mehr das nfache vom Gelde des 2ten beträgt a fl., und das Geld des 2ten mehr das mfache vom Gelde des rten auch a fl.

Wieviel hat ein jeder Gulden?

Der 1te habe x fl., der 2te y fl.; ſo iſt

nach der 1ten Bedingung $x + ny = a$ und

nach der 2ten $y + mx = a$, alſo

aus der 1ten Gleichung $ny = a - x$

$$y = \frac{a - x}{n} \text{ und}$$

aus der 2ten $y = a - mx$, folglich

$$a - mx = \frac{a - x}{n}$$

$$na - nmx = a - x$$
$$x - nmx = a - na$$
$$x = \frac{a - na}{1 - mn} = \frac{a(1-n)}{1-mn} \text{ und}$$
$$y = a - mx = a - \frac{ma + mna}{1 - mn} = \frac{a - mna - ma + mna}{1 - mn}$$
$$= \frac{a - ma}{1 - mn} = \frac{a(1 - m)}{1 - mn}.$$

Im vorigen Beyſpiele war $a = 100$, $n = \frac{3}{4}$ und $m = \frac{2}{3}$; alſo
$$x = \frac{a(1-n)}{1-mn} = \frac{100(1-\frac{3}{4})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{100}{4} : \frac{1}{2}$$
$$= \frac{200}{4} = 50, \text{ und}$$
$$y = \frac{a(1-m)}{1-mn} = \frac{100(1-\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{100}{3} : \frac{1}{2}$$
$$= \frac{200}{3} = 66\tfrac{2}{3}.$$

139. Es ſeyen 3, 4, 5 oder mehr Gleichungen einer Aufgabe von ebenſoviel Unbekannten aufzulöſen.

Suchen wir den Werth von einer Unbekannten aus jeder Gleichung, und ſetzen, weil die gefundenen Werthe einerley bedeuten, den 1ten gleich dem 2ten, den 2ten gleich dem 3ten, den 3ten gleich dem 4ten u. ſ. f.; ſo bekommen wir eine Gleichung und auch eine Unbekannte, weniger, als zuvor. Und fahren wir ſo fort nach der nämlichen Methode; ſo werden wir endlich auf eine Gleichung kommen, die nur noch eine Unbekannte enthält.

Es ſeyen dieſe drey Gleichungen aufzulöſen
$$x + ay - bz = m$$
$$bx + cy + dz = n$$
$$ex - dy - cz = q; \text{ ſo iſt}$$

aus der 1ten Gleichung $x = m - ay + bz$

aus

aus der 2ten Gleichung $x = \frac{n - cy - dz}{b}$ und

aus der 3ten $x = \frac{q + dy + cz}{e}$; alſo

$$m - ay + bz = \frac{n - cy - dz}{b} \text{ und}$$

$$\frac{n - cy - dz}{b} = \frac{q + dy + cz}{e}, \text{ folglich wieder}$$

aus der 1ten $bm - aby + bbz = n - cy - dz$

$$cy - aby = n - dz - bm - bbz$$

$$y = \frac{n - dz - bm - bbz}{c - ab}, \text{ und}$$

aus der 2ten $en - cey - dez = bq + bdy + bcz$

$$bdy + cey = en - dez - bq - bcz$$

$$y = \frac{en - dez - bq - bcz}{bd + ce}, \text{ alſo endlich}$$

$$\frac{n - dz - bm - bbz}{c - ab} = \frac{en - dez - bq - bcz}{bd + ce}.$$

Aus dieſer Gleichung wird nun der Werth von z bekannt, welcher anſtatt z in den Werth von y geſeßet, auch y zu erkennen giebt: und ſeßet man ſodann anſtatt z und y ihre Werthe in den Werth von x; ſo wird auch dieſer bekannt.

Wenn nicht alle Unbekannten in jeder Gleichung enthalten ſind; ſo kürzet ſich dieſes Verfahren von ſelbſt ab, wie wir aus einigen der folgenden Beyſpielen ſehen werden.

Drey haben jeder eine gewiſſe Anzahl Gulden. Giebt der 2te dem 1ten $\frac{1}{3}$, und der 3te $\frac{1}{7}$ von ſeinem Gelde; ſo hat der 1te 26 fl: und giebt der 1te dem 2ten $\frac{1}{2}$, und der 3te auch $\frac{1}{2}$ ſeines Geldes; ſo hat der 2te 51 fl.: und giebt endlich der 1te dem 3ten $\frac{2}{3}$, und der 2te $\frac{5}{6}$ ſeines Geldes; ſo hat der 3te 70 fl.

Wie-

Wieviel hat ein jeder Gulden?

Der 1te habe x, der 2te y, und der 3te z fl.; ſo iſt

nach der 1ten Bedingung $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 26$

nach der 2ten Bedingung $y + \frac{x}{2} + \frac{z}{2} = 51$ und

nach der 3ten Bedingung $z + \frac{2x}{3} + \frac{5y}{6} = 70$.

Aus der 1ten Gleichung iſt $x = 26 - \frac{y}{3} - \frac{z}{7}$

aus der 2ten $2y + x + z = 102$, und
$$x = 102 - 2y - z$$

aus der 3ten $3z + 2x + \frac{5y}{2} = 210$.

$$2x = 210 - 3z - \frac{5y}{2}, \text{ und}$$

$$x = 105 - \frac{3z}{2} - \frac{5y}{4}; \text{ alſo}$$

$26 - \frac{y}{3} - \frac{z}{7} = 102 - 2y - z$ und

$102 - 2y - z = 105 - \frac{3z}{2} - \frac{5y}{4}$; folglich wieder

aus der 1ten $78 - y - \frac{3z}{7} = 306 - 6y - 3z$

$$6y - y = 306 - 3z + \frac{3z}{7} - 78$$

$$5y = 228 - \frac{18z}{7}$$

$$y = \frac{228}{5} - \frac{18z}{35} \text{ und}$$

aus

aus der 2ten $408 - 8y - 4z = 420 - 6z - 5y$

$$408 - 420 + 6z - 4z = 8y - 5y$$

$$2z - 12 = 3y$$

$$y = \frac{2z - 12}{3}$$; alſo endlich

$$\frac{2z - 12}{3} = \frac{228}{5} - \frac{18z}{35}$$

$$2z - 12 = \frac{684}{5} - \frac{54z}{35}$$

$$10z - 60 = 684 - \frac{54z}{7}$$

$$70z - 420 = 4788 - 54z$$

$$70z + 54z = 4788 + 420$$

$$124z = 5208$$

$$z = \frac{5208}{124} = 42,$$

$$y = \frac{2z - 12}{3} = 24$$ und

$$x = 26 - \frac{y}{3} - \frac{z}{7} = 26 - 8 - 6 = 12.$$

Drey haben ein Haus um 6000 fl. gekauft. Giebt der 2te dem 1ten die Hälfte, der 3te dem 2ten $\frac{1}{3}$, der 1te dem 3ten $\frac{1}{4}$ ſeines Geldes; ſo kann ein jeder das Haus allein bezahlen. Wieviel hat jeder Gulden?

Der 1te habe x, der 2te y, und der 3te z fl.; ſo iſt

nach der 1ten Bedingung $x + \frac{y}{2} = 6000$

nach der 2ten . . . . . $y + \frac{z}{3} = 6000$ und

nach der 3ten . . . . . $z + \frac{x}{4} = 6000$; alſo

aus

Im 1ten Spiele verlor der erſte $y + z = 3a - x$ ſſ.; alſo hatte nach dem 1ten Spiele

der 1te $x - 3a + x = 2x - 3a$
der 2te . . . . $2y$ und
der 3te . . . . $2z$

Im 2ten Spiele verlor der 2te $2x - 3a + 2z = 3a - 2y$; alſo hatte nach dem 2ten Spiele

der 2te $2y - 3a + 2y = 4y - 3a$
der 1te . . . . $4x - 6a$ und
der 3te . . . . $4z$.

Im 3ten Spiele verlor der 3te $4y - 3a + 4x - 6a = 3a - 4z$; alſo hatte nach dem 3ten Spiele

der 3te $4z - 3a + 4z = 8z - 3a = a$
der 2te . . . . $8y - 6a = a$
der 1te . . . . $8x - 12a = a$; folglich iſt

$$8z = 4a, \text{ und } z = \frac{4a}{8}$$

$$8y = 7a, \text{ und } y = \frac{7a}{8}$$

$$8x = 13a, \text{ und } x = \frac{13a}{8}$$

Es ſey $a = 24$; ſo iſt

$$x = \frac{13a}{8} = 39$$

$$y = \frac{7a}{8} = 21$$

$$z = \frac{4a}{8} = 12$$

Es ſey a = 7880; ſo iſt

$$x = \frac{13a}{8} = 13 \times 985 = 12805$$

$$y = \frac{7a}{8} = 7 \times 985 = 6895$$

$$z = \frac{4a}{8} = 4 \times 985 = 3940.$$

Man giebt für drey Regimenter, welche ſich im Treffen beſonders hervorgethan haben, a fl. alſo unter ſie auszutheilen, daß jeder Mann von jenem Regimente, welches ſich am beſten gehalten hat, 1 fl. bekomme, und das übrige gleich unter die andern zertheilet werde.

Nun wird dieſer Gulden dem 1ten Regimente zuerkannt; ſo bekömmt ein jeder der zween übrigen Regimenter nur $\frac{1}{2}$ fl.: und wird dieſer Gulden dem 2ten Regimente zugeſprochen; ſo kömmt auf einen jeden der zween übrigen Regimenter nur $\frac{1}{3}$ fl: fällt aber dieſer Gulden dem 3ten Regimente zu; ſo erhält ein jeder der zween andern Regimenter nur $\frac{1}{4}$ fl. Wieviel Mann ſind von jedem Regimente aus dem Gefechte zurückgekommen?

Von dem 1ten Regimente x, von dem 2ten y, und von dem 3ten z Mann.

Alſo erhält im 1ten Falle das 1te Regiment x fl.

das 2te . . . $\frac{y}{2}$ fl. und

das 3te . . . $\frac{z}{2}$ fl.;

im 2ten Falle das 1te . . . $\frac{x}{3}$ fl.

das 2te . . . y fl. und

das 3te . . . $\frac{z}{3}$ fl., endlich

im

im 3ten Falle das 1te . . . $\frac{x}{4}$ fl.

das 2te . . . $\frac{y}{4}$ fl. und

das 3te . . z fl.

Alſo iſt $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = a$

$y + \frac{x}{3} + \frac{z}{3} = a$ und

$z + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = a$, folglich

aus der 1ten Gleichung $x = a - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$

aus der 2ten . . . . . $x = 3a - 3y - z$ und

aus der 3ten . . . . . $x = 4a - y - 4z$; alſo iſt

$a - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 3a - 3y - z$ und

$3a - 3y - z = 4a - y - 4z$; folglich wieder

aus der 1ten $2a - y - z = 6a - 6y - 2z$

$5y = 4a - z$

$y = \frac{4a - z}{5}$

aus der 2ten $2y = 3z - a$

$y = \frac{3z - a}{2}$; alſo endlich

$\frac{3z - a}{2} = \frac{4a - z}{5}$

$15z - 5a = 8a - 2z$

$17z = 13a$

$z = \frac{13a}{17}$

$$y = \frac{3z - a}{2} = \frac{39a}{34} - \frac{a}{2} = \frac{39a}{34} - \frac{17a}{34}$$

$$= \frac{22a}{34} = \frac{11a}{17}$$

$$x = a - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = a - \frac{11a}{34} - \frac{13a}{34}$$

$$= \frac{34a}{34} - \frac{24a}{34} = \frac{10a}{34} = \frac{5a}{17}$$

Weil jede Bedingung durch die Summe der Drey Unbekannten und durch eine aus dieſen Unbekannten kann ausgedrücket werden; ſo können wir in dieſem und in allen dergleichen Fällen bequemer zur Auflöſung gelangen, wenn wir die Summe der Unbekannten durch einen beſondern Buchſtaben S ausdrücken, und dieſe zuerſt ſuchen. Es ſey daher

$x + y + z = S$; ſo iſt

wegen der 1ten Bedingung $x + \frac{S-x}{2} = a$

wegen der 2ten . . . . . $y + \frac{S-y}{3} = a$ und

wegen der 3ten . . . . . $z + \frac{S-z}{4} = a$; alſo

$$x = 2a - S$$

$$y = \frac{3a - S}{2}$$

$$z = \frac{4a - S}{3}, \text{ folglich}$$

$$x + y + z = 2a - S + \frac{3a - S}{2} + \frac{4a - S}{3}$$

$$S = 2a - S + \frac{3a - S}{2} + \frac{4a - S}{3}$$

$$2S = 4a - 2S + 3a - S + \frac{8a - 2S}{3}$$
$$6S = 12a - 6S + 9a - 3S + 8a - 2S$$
$$6S = 29a - 11S$$
$$17S = 29a$$
$$S = \frac{29a}{17};$$ alſo

$$x = 2a - S = 2a - \frac{29a}{17} = \frac{34a - 29a}{17} = \frac{5a}{17}$$
$$y = \frac{3a - S}{2} = \frac{51a - 29a}{2 \times 17} = \frac{22a}{2 \times 17} = \frac{11a}{17}$$
$$z = \frac{4a - S}{3} = \frac{68a - 29a}{3 \times 17} = \frac{39a}{3 \times 17} = \frac{13a}{17}.$$

Es ſey $a = 1326$; ſo iſt

$$x = \frac{5a}{17} = \frac{5 \times 1326}{17} = 5 \times 78 = 390,$$
$$y = \frac{11a}{17} = \frac{11 \times 1326}{17} = 11 \times 78 = 858,$$
$$z = \frac{13a}{17} = \frac{13 \times 1326}{17} = 13 \times 78 = 1014.$$

Von den unbeſtimmten Gleichungen und Aufgaben.

140.

Wir haben bisher geſehen, wie jede Aufgabe, die ebenſoviele verſchiedene Bedingungen, als Unbekannten enthält, am Ende auf eine Gleichung von einer Unbekannten gebracht werden kann. Ebendaher läßt ſich ſchlie-

 ßen,

ſen, daß, ſobald bey einer Aufgabe eine Bedingung weniger vorkömmt, als Unbekannte zu ſuchen ſind, die am Ende gefundene Gleichung noch allemal zwo Unbekannten enthalten werde. Jene heißen **beſtimmte Aufgaben**, weil die Unbekannten durch ebenſoviele Bedingungen dergeſtalt beſtimmet ſind, daß für jede nur ein gewiſſer Werth gefunden wird; dieſe aber **unbeſtimmte Aufgaben**, weil jede Unbekannte verſchiedene und oft unendlich viele Werthe haben kann.

Ebendaher wird auch eine Gleichung, welche nur eine Unbekannte enthält, **eine beſtimmte**, und welche mehr als eine Unbekannte enthält, **eine unbeſtimmte Gleichung** genennt.

Eine Unbeſtimmte Aufgabe ſetzet allemal voraus, daß die Werthe der Unbekannten ganze und bejahende Zahlen ſeyen.

Wer alſo eine Unbeſtimmte Gleichung

$$bx \mp ay = c$$

auflöſen ſoll, der hat die ganzen und bejahenden Zahlen zu beſtimmen, welche anſtatt x und y geſetzt, der Gleichung ein Genügen thun.

Wenn b durch n und a auch durch n theilbar iſt; ſo läßt ſich auch bx und ay, folglich auch ihr Unterſcheid $bx - ay$ und ihre Summe $bx + ay$ oder c durch n theilen.

Wenn daher die Coefficienten b und a der Unbekannten x und y einen gemeinen Theiler n haben, den der bekannte Ausdruck c nicht hat; ſo iſt die Auflöſung der Gleichung oder Aufgabe unmöglich.

So kann es nimmermehr ſeyn, daß $6x \mp 3y = 40$ ſey. Denn $6x \mp 3y$ bedeutet allemal eine von jenen Zahlen, die durch 3 theilbar ſind, unter denen doch 40 nicht iſt.

Wenn ay verneinend iſt oder $bx - ay = c$; ſo iſt

$$x = \frac{ay + c}{b} \text{ und } y = \frac{bx - c}{a}.$$

Folg.

Folglich wird x größer, ſo oft y größer wird, und umgekehrt, ſo oft x wächſt, ſo wächſt auch y.

Daher können die Werthe von x und y ohne Ende fortwachſen, und eine Aufgabe, welche auf eine ſolche Gleichung führet, hat allemal unendlich viele Auflöſungen.

Wenn ay bejahend iſt, oder bx + ay = c; ſo iſt

$$x = \frac{c - ay}{b} \text{ und } y = \frac{c - bx}{a}.$$

Folglich nimmt x ab, da y wächſt; und y wird wieder kleiner, da x größer wird. Daher kann keine von dieſen Unbekannten ohne Ende fort, ſondern nur ſolange wachſen, als die andere noch bejahend oder größer, als o bleibt: denn weil x und y größer als o ſeyn müßen; ſo iſt, geſetzt dieſes Zeichen (>) bedeute größer, und dieſes (<) kleiner,

$$\frac{c - ay}{b} > 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{c - bx}{a} > 0$$

$$c - ay > 0 \qquad\qquad c - bx > 0$$

$$c > ay \qquad\qquad c > bx$$

$$y < \frac{c}{a}, \qquad\qquad x < \frac{c}{b}.$$

Es liegen alſo die Werthe von y zwiſchen o und $\frac{c}{a}$, und jene von x zwiſchen o und $\frac{c}{b}$.

Daher hat eine Aufgabe, welche auf eine ſolche Gleichung führet, allemal nur eine gewiſſe Anzahl Auflöſungen.

Unbeſtimmte Aufgaben, welche auf eine ſolche Gleichung führen

$$bx - ay = c \text{ oder } bx = ay + c.$$

141.

Der Peter iſt dem Paul einen Kreuzer ſchuldig, jener hat nichts als Siebner, und dieſer nichts als Siebenzehner. Wie ſoll der Peter den Paul bezahlen?

Der Peter gebe dem Paul x Siebner, alſo 7x kr., und der Paul gebe dem Peter wieder y Siebenzehner, alſo 17y kr. zurück; ſo müßen vermöge der Bedingung der Aufgabe jene x Siebner einen Kreuzer mehr ausmachen, als dieſe y Siebenzehner. Folglich iſt

$$7x = 17y + 1.$$

Theilen wir beyde Glieder durch 7; ſo wird

$$x = 2y + \frac{3y + 1}{7},$$

alſo x eine ganze Zahl, ſobald $\frac{3y + 1}{7}$ eine ganze Zahl iſt. Drücken wir daher dieſe Bedingung dadurch aus, daß wir $\frac{3y + 1}{7}$ einer ganzen Zahl p gleich ſetzen; ſo erhalten wir wieder eine Gleichung

$$\frac{3y + 1}{7} = p,$$

woraus wir den Werth von y ſo wie aus der vorigen jenen von x ſuchen, und abermal beſtimmen können, unter welcher Bedingung auch y eine ganze Zahl wird.

Es

Es ſey daher

$$\frac{3y+1}{7} = p; \text{ ſo iſt } x = 2y + p \text{ und}$$

$$3y + 1 = 7p$$
$$3y = 7p - 1$$
$$y = 2p + \frac{p-1}{3},$$

alſo y eine ganze Zahl, ſobald $\frac{p-1}{3}$ eine ganze iſt.

Es ſey daher

$$\frac{p-1}{3} = q; \text{ ſo iſt } y = 2p + q \text{ und}$$

$$p - 1 = 3q$$
$$p = 3q + 1.$$

Setzen wir daher den Werth von p anſtatt p in den Werth von y, und ſodann den Werth von y und p anſtatt y und p in den Werth von x; ſo wird,

weil $y = 2p + q$,	und weil $x = 2y + p$,
$y = 6q + 2 + q$	$x = 14q + 4 + 3q + 1$
$y = 7q + 2$	$x = 17q + 5.$

Folglich wird x und y allemal eine ganze Zahl, was immer für eine ganze anſtatt q geſetzet wird.

Allein weil x und y nicht nur ganze, ſondern auch zugleich bejahende Zahlen oder ſolche ſeyn müßen, die größer ſind als 0; ſo iſt ferner

$7q + 2 > 0$	und $17q + 5 > 0$
$7q > -2$	$17q > -5$
$q > -\frac{2}{7}$	$q > -\frac{5}{17}$
$q > -1$	$q > -1$

Folglich iſt $q =$	0	1	2	3	4	5	6	ꝛc.
$x = 17q + 5 =$	5	22	39	56	73	90	107	ꝛc.
$y = 7q + 2 =$	2	9	16	23	30	37	44	ꝛc.

Alſo giebt der Peter dem Paul 5 Siebner, und der Paul giebt dem Peter wieder 2 Siebenzehner zurück, oder der Peter giebt 22 Siebner, und der Paul 9 Siebenzehner u. ſ. f. der Peter immer um 17 Siebner, und der Paul um 7 Siebenzehner mehr. Denn ſo oft q um 1 wächſt; ſo wächſt $x = 17q + 5$ um 17, und $y = 7q + 2$ um 7.

Suche eine Zahl N, welche durch 3 getheilt 2, und durch 5 getheilt 1 übrig laſſe.

Weil N durch 3 getheilt 2 übrig laſſen ſoll; ſo ſetze ich, daß $N : 3 = x + \frac{2}{3}$,
und weil N durch 5 getheilt 1 übrig laſſen ſoll; ſo ſetze ich ferner $N : 5 = y + \frac{1}{5}$;

folglich iſt $N = 3x + 2$ und $N = 5y + 1$; alſo

$$3x + 2 = 5y + 1$$
$$3x = 5y - 1$$
$$x = y + \frac{2y - 1}{3}.$$

Es ſey daher $\frac{2y - 1}{3} = p$; ſo iſt $x = y + p$ und

$$2y - 1 = 3p$$
$$2y = 3p + 1$$
$$y = p + \frac{p + 1}{2}$$

Es ſey daher $\frac{p + 1}{2} = q$; ſo iſt $y = p + q$ und

$$p + 1 = 2q$$
$$p = 2q - 1;\ \text{alſo}$$
$$y = p + q = 2q - 1 + q = 3q - 1$$
$$N = 5y + 1 = 15q - 5 + 1 = 15q - 4.$$

Daher iſt ferner $15q - 4 > 0$

$$15q > 4$$
$$q > \tfrac{4}{15}$$
$$q > 0.$$

Folg-

Folglich iſt $q =$	1	2	3	ꝛc.
$N = 15q - 4 =$	11	26	41	ꝛc.

Der kleinſte Werth von N iſt alſo 11, und die folgenden wachſen um 15 ohne Ende fort.

Einer kauft Pferde, Moldauer und Hungarn, und zahlt für einen Hungarn 52 fl., und für einen Moldauer 67 fl.; für alle Moldauer aber um 8 fl. weniger als für alle Hungarn. Wieviel Moldauer und Hungarn ſind es?

Es ſeyen x Hungarn und y Moldauer; ſo haben jene gekoſtet 52x fl., und dieſe 67y fl.; folglich iſt

$$52x = 67y + 8$$
$$x = y + \frac{15y + 8}{52}$$

Es ſey daher $\frac{15y + 8}{52} = p$; ſo iſt $x = y + p$ und

$$15y + 8 = 52p$$
$$15y = 52p - 8$$
$$y = 3p + \frac{7p - 8}{15}$$

Es ſey daher $\frac{7p - 8}{15} = q$; ſo iſt $y = 3p + q$ und

$$7p - 8 = 15q$$
$$7p = 15q + 8$$
$$p = 2q + \frac{q + 8}{7}$$

Es ſey daher $\frac{q + 8}{7} = r$; ſo iſt $p = 2q + r$ und

$$q + 8 = 7r$$
$$q = 7r - 8$$
$$p = 14r - 16 + r = 15r - 16$$
$$y = 45r - 48 + 7r - 8 = 52r - 56$$
$$x = 52r - 56 + 15r - 16 = 67r - 72$$

Daher iſt ferner

$52r - 56 > 0$	und $67r - 72 > 0$
$52r > 56$	$67r > 72$
$r > \frac{56}{52}$	$r > \frac{72}{67}$
$r > 1$	$r > 1.$

Folglich iſt				
$r =$	2	3	4	ꝛc.
$x = 67r - 72 =$	62	129	196	ꝛc.
$y = 52r - 56 =$	48	100	152	ꝛc.

Es ſind alſo die kleinſten Werthe von x und y, 62 und 48: die folgenden von x wachſen um 67, und jene von y um 52 ohne Ende fort.

Einer kauft mehrere Stücke Tuch, und zahlt für jedes Stück von der 1ten Sorte 31 fl, und für jedes von der 2ten Sorte 80 fl. Nun koſten alle Stücke von der 2ten Sorte 7 fl. mehr, als alle Stücke von der 1ten Sorte. Wieviel ſind es Stücke von jeder Sorte?

Von der 1ten x Stücke, und von der 2ten y Stücke.

Daher iſt $31x + 7 = 80y$

$$31x = 80y - 7$$

$$x = 2y + \frac{18y - 7}{31}$$

Es ſey daher $\frac{18y-7}{31} = p$; ſo iſt $x = 2y + p$ und

$$18y - 7 = 31p$$

$$18y = 31p + 7$$

$$y = p + \frac{13p + 7}{18}$$

Es ſey daher $\frac{13p + 7}{18} = q$; ſo iſt $y = p + q$ und

$$13p + 7 = 18q$$

$$13p = 18q - 7$$

$$p = q + \frac{5q - 7}{13}$$

Es

Es ſey daher $\frac{5q - 7}{13} = r$; ſo iſt; $p = q + r$ und

$$5q - 7 = 13r$$
$$5q = 13r + 7$$
$$q = 2r + \frac{3r + 7}{5}$$

Es ſey daher $\frac{3r + 7}{5} = S$; ſo iſt $q = 2r + S$ und

$$3r + 7 = 5S$$
$$3r = 5S - 7$$
$$r = S + \frac{2S - 7}{3}$$

Es ſey daher $\frac{2S - 7}{3} = t$; ſo iſt $r = S + t$ und

$$2S - 7 = 3t$$
$$2S = 3t + 7$$
$$S = t + \frac{t + 7}{2}$$

Es ſey daher $\frac{t + 7}{2} = u$; ſo iſt $S = t + u$ und

$$t + 7 = 2u$$
$$t = 2u - 7$$; alſo

$$S = 2u - 7 + u = 3u - 7$$
$$r = 3u - 7 + 2u - 7 = 5u - 14$$
$$q = 10u - 28 + 3u - 7 = 13u - 35$$
$$p = 13u - 35 + 5u - 14 = 18u - 49$$
$$y = 18u - 49 + 13u - 35 = 31u - 84$$
$$x = 62u - 168 + 18u - 49 = 80u - 217.$$

Daher iſt ferner

$31u - 84 > 0$	und $80u - 217 > 0$
$31u > 84$	$80u > 217$
$u > \frac{84}{31}$	$u > \frac{217}{80}$
$u > 2$	$u > 2.$

Folg.

Folglich iſt $u =$	3	4	5	ꝛc.
$x = 80u - 217 =$	23	103	183	ꝛc.
$y = 31u - 84 =$	9	40	71	ꝛc.

Es ſind alſo die kleinſten Werthe von x und y, 23 und 9: die folgenden von x wachſen um 80, und jene von y um 31 ohne Ende fort.

Es ſey endlich allgemein dieſe Gleichung

$$bx = ay + c$$

aufzulöſen, vorausgeſetzt, daß $b < a$, und daß b und a keinen gemeinen Theiler mehr haben.

Wenn 1tens $a : b = d + \frac{e}{b}$; ſo iſt $x = dy + \frac{ey + c}{b}$

Es ſey daher $\frac{ey+c}{b} = p$; ſo iſt $x = dy + p$ und

$$ey + c = bp$$
$$ey = bp - c.$$

Wenn 2tens $b : e = f + \frac{g}{e}$; ſo iſt $y = fp + \frac{gp - c}{e}$.

Es ſey daher $\frac{gp - c}{e} = q$; ſo iſt $y = fp + q$ und

$$gp - c = eq$$
$$gp = eq + c.$$

Wenn 3tens $e : g = h + \frac{k}{g}$; ſo iſt $p = hq + \frac{kq + c}{g}$.

Es ſey daher $\frac{kq + c}{g} = r$; ſo iſt $p = hq + r$ und

$$kq + c = gr$$
$$kq = gr - c.$$

Wenn endlich 4tens $g : k = l + \frac{1}{k}$; ſo iſt $q = lr + \frac{r - c}{k}$.

Es ſey daher $\frac{r - c}{k} = S$; ſo iſt $q = lr + S$ und

$$r - c = kS$$
$$r = kS + c.$$

folg-

folglich $q = lkS + lc + S$

$q = (lk + 1)S + lc$; allein,

weil $g : k = l + \frac{1}{k}$; ſo iſt $g = kl + 1$, alſo

$q = gS + lc$

folglich $p = hgS + hlc + kS + c$

$p = (hg + k)S + (hl + 1)c$; allein,

weil $e : g = h + \frac{k}{g}$; ſo iſt $e = hg + k$, alſo

$p = eS + (hl + 1)c$

folglich $y = feS + (fhl + f)c + gS + lc$

$y = (fe + g)S + (fhl + f + l)c$; allein,

weil $b : e = f + \frac{g}{e}$; ſo iſt $b = fe + g$, alſo

$y = bS + (fhl + f + l)c$

folglich $x = dbS + (dfhl + df + dl)c + eS + (hl + 1)c$

$x = (db + e)S + (dfhl + df + dl + hl + 1)c$; allein

weil $a : b = d + \frac{e}{b}$; ſo iſt $a = bd + e$; alſo

$x = aS + (dfhl + df + dl + hl + 1)c$.

Hieraus erhellet 1tens, daß d, f, h, l und k nichts anders ſind, als die Quotienten, welche herauskommen, wenn man von a und b den größten gemeinen Theiler ſuchet.

Denn es iſt vorausgeſetzet worden, daß

$$a : b = d + \frac{e}{b}$$

$$b : e = f + \frac{g}{e}$$

$$e : g = h + \frac{k}{g}$$

$$g : k = l + \frac{1}{k}, \text{ folglich}$$

$$k : 1 = k + 0.$$

2tens, daß die Anzahl der Beſtimmungen

$$\begin{aligned} r &= kS + c \\ q &= gS + lc \\ p &= eS + (hl + 1)c \\ y &= bS + (fhl+f+l)c \\ x &= aS + (dfhl+df+dl+hl+1)c \end{aligned}$$

immer die nämliche ſeyn werde, als die Anzahl jener Quotienten.

3tens, daß der erſte Coefficient von c in ebendieſen Beſtimmungen allemal gleich 1 ſey,

der 2te gleich dem Producte aus dem 1ten 1 und l,

der 3te gleich dem Producte aus dem 2ten l und h, mehr dem 1ten 1,

der 4te gleich dem Producte aus dem 3ten (hl+1) und f, mehr dem 2ten l,

der 5te gleich dem Producte aus dem 4ten (fhl+f+l) und d mehr dem 3ten hl + 1.

Nachdem man alſo anſtatt des letzten Quotienten k 1 ſetzet, und ſodann dieſe Quotienten in verkehrter Ordnung, wie folgt, untereinander ſchreibt:

Quotienten.	Coefficienten von c
1	1
l	$l \times 1 + 0 = l$
h	$h \times l + 1 = hl + 1$
f	$f \times (hl + 1) + l = fhl + f + l$
d	$d \times (fhl+f+l) + hl + 1 = dfhl + df + dl + hl + 1$.

So findet man den nten Coefficienten, wenn man den nten Quotienten mit dem (n—1)ten Coefficienten multipliciret, und zu dem Producte noch den (n—2)ten Coefficienten addirt:

4tens, daß die Zahl c bey jeder aus dieſen Beſtimmungen

$$x = dy + \frac{ey + c}{b}$$

$$y = fp + \frac{gp - c}{e}$$

$$p = hq + \frac{kq + c}{g}$$

$$q = lr + \frac{r - c}{k}$$

$$r = kS + c$$

ihre Bezeichnung ändere, alſo in allen ungeraden Beſtimmungen mit ihrem erſten Zeichen, in allen geraden aber mit entgegengeſetztem Zeichen vorkomme.

5tens Endlich, daß in den letzten Werthen von x und y

$$y = bS + (fhl + f + 1)c$$

$$x = aS + (dfhl + df + dl + hl + 1)c$$

der Coefficient von S in dem Werthe von y allemal b, und in dem Werthe von x allemal a ſeyn werde.

Wenn wir alſo eine ſolche Gleichung $bx = ay + c$ aufzulöſen haben; ſo können wir erſtlich die Quotienten d, f, h, l, k finden, dadurch die Bezeichnung und die Coefficienten von c für die zween letzten Werthe von y und x beſtimmen, dieſe Werthe ſogleich niederſchreiben, und ſodann, wie ſonſt, verfahren.

Iſt die Gleichung dieſe

$31x = 80y - 7$; ſo iſt

$$80 : 31 = 2 + \tfrac{18}{31}$$
$$31 : 18 = 1 + \tfrac{13}{18}$$
$$18 : 13 = 1 + \tfrac{5}{13}$$
$$13 : 5 = 2 + \tfrac{3}{5}$$
$$5 : 3 = 1 + \tfrac{2}{3}$$
$$3 : 2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$2 : 1 = 2 + 0.$$

Wenn man alſo anſtatt des letzten Quotienten 1 ſetzet, und dieſelben in verkehrter Ordnung untereinander ſchreibt; ſo findet man daraus, wie folgt, die Coefficienten von c=7.

Quo-

Quotienten.	Coefficienten.
1	1
1	$1 \times 1 + 0 = 1$
1	$1 \times 1 + 1 = 2$
2	$2 \times 2 + 1 = 5$
1	$1 \times 5 + 2 = 7$
1	$1 \times 7 + 5 = 12$
2	$2 \times 12 + 7 = 31$.

Weil nun die Anzahl der Quotienten eine ungerade Zahl iſt; ſo behält hier die Zahl 7 ihr Zeichen (—).

Alſo iſt $y = 31q - 7 \times 12 = 31q - 84$
$x = 80q - 7 \times 31 = 80q - 217$, wie im letzten Beyſpiele.

Suche eine Zahl N, welche durch 23 dividiret 13, und durch 28 dividirt 19 übrig laſſe.

Es ſey $N : 23 = x + \frac{13}{23}$ und $N : 28 = y + \frac{19}{28}$; ſo iſt
$N = 23x + 13$ und
$N = 28y + 19$, alſo
$23x + 13 = 28y + 19$
$23x = 28y + 6$, und

	Quot.	Coeff.
$28 : 23 = 1 + \frac{5}{23}$	1	1
$23 : 5 = 4 + \frac{3}{5}$	1	$1 \times 1 + 0 = 1$
$5 : 3 = 1 + \frac{2}{3}$	1	$1 \times 1 + 1 = 2$
$3 : 2 = 1 + \frac{1}{2}$	4	$4 \times 2 + 1 = 9$
$2 : 1 = 2 + 0$	1	$1 \times 9 + 2 = 11$

Daher iſt $y = 23q + 6 \times 9 = 23q + 54$
$x = 28q + 6 \times 11 = 28q + 66$
$N = 23x + 13 = 644q + 1531$; alſo ferner
$644q + 1531 > 0$
$644q > -1531$
$q > -\frac{1531}{644}$
$q > -3$

Folglich iſt q =	−2	−1	0	1	ꝛc.
$N = 644q + 1531 =$	243	887	1531	2175	ꝛc.

Der

Der kleinſte Werth von N iſt alſo 243, und die übrigen wachſen um 644 ohne Ende fort.

Suche eine Zahl N, welche durch 11 dividirt 3, durch 13 dividirt 5, und durch 19 dividirt 7 übrig laſſe.

Wegen der 1ten Bedingung ſey $N=11x+3$
wegen der 2ten . . . . $N=13y+5$ und
wegen der 3ten . . . . $N=19z+7$; ſo iſt 1tens

$$11x+3=13y+5$$

$11x=13y+2$ und	Quot.	Coeff.
$13 : 11 = 1 + \frac{2}{11}$	1	1
$11 : 2 = 5 + \frac{1}{2}$	5	$5\times1+0=5$
$2 : 1 = 2 + 0$	1	$1\times5+1=6$

Daher iſt

$$y=11q+2\times5=11q+10$$
$$x=13q+2\times6=13q+12$$

$N=11x+3=143q+135$; alſo iſt 2tens

$$19z+7=143q+135$$

$19z=143q+128$ und	Quot.	Coeff.
$143 : 19 = 7 + \frac{10}{19}$	1	1
$19 : 10 = 1 + \frac{9}{10}$	1	$1\times1+0=1$
$10 : 9 = 1 + \frac{1}{9}$	1	$1\times1+1=2$
$9 : 1 = 9 + 0$	7	$7\times2+1=15$

Daher iſt $z = 143r - 128 \times 15$

$$z = 143r - 1920$$
$$N = 19z + 7 = 2717r - 36480 + 7$$

$N = 2717r - 36473$; alſo ferner

$$2717r - 36473 > 0$$
$$2717r > 36473$$
$$r > \frac{36473}{2717}$$
$$r > 13.$$

Folglich iſt	$r =$	14	15	ꝛc.
$N = 2717r - 36473 =$		1565	4282	ꝛc.

Der kleinſte Werth von N iſt alſo 1565, und die übrigen wachſen um 2717 ohne Ende fort.

Ein Mechaniſt braucht zwey Räder, deren eines in das andere eingreiffe. Nun ſoll die Anzahl der Zähne des kleinern durch 5 getheilt 2, und die Anzahl der Zähne des größern durch 7 getheilt 5 übrig laſſen; ferner ſoll das kleinere 9mal umlaufen, während als das größere einmal umläuft, doch ſo, daß alsdann der erſte Zahn des kleinern in den zweyten Zahn des größern eingreiffe. Wie viel Zähne muß jedes aus dieſen Rädern haben?

Es habe das kleinere wegen der 1ten Bedingung $N = 5x + 2$ Zähne, und das größere wegen der 2ten Bedingung $M = 7y + 5$ Zähne, ſo iſt wegen der 3ten Bedingung

$$9(5x+2) = 7y+5+1 \text{ oder}$$
$$7y+6 = 45x+18$$
$$7y = 45x+12 \text{ und}$$

	Quot.	Coeff.
$45 : 7 = 6 + \frac{3}{7}$	1	1
$7 : 3 = 2 + \frac{1}{3}$	2	$2 \times 1 + 0 = 2$
$3 : 1 = 3 + 0$	6	$6 \times 2 + 1 = 13$

Daher iſt $x = 7q + 12 \times 2 = 7q + 24$
$$y = 45q + 12 \times 13 = 45q + 156$$
$$N = 5x + 2 = 35q + 122$$
$$M = 7y + 5 = 315q + 1097; \text{ alſo ferner}$$

$35q + 122 > 0$	und $315q + 1097 > 0$
$35q > -122$	$315q > -1097$
$q > -\frac{122}{35}$	$q > -\frac{1097}{315}$
$q > -4$	$q > -4$

Folglich iſt						
$q =$	−3	−2	−1	0	1	ꝛc.
$N = 35q + 122 =$	17	52	87	122	157	ꝛc.
$M = 315q + 1097 =$	152	467	782	1097	1412	ꝛc.

Die kleinſte Anzahl N der Zähne, ſo das kleinere Rad haben kann, iſt alſo 17; die folgenden wachſen um 35: und die kleinſte Anzahl M der Zähne, ſo das größere Rad haben kann, iſt 152, und die folgenden wachſen um 315.

Un-

Unbeſtimmte Aufgaben, welche auf eine ſolche Gleichung führen.

$bx + ay = c$, oder $bx = c - ay$.

§. 42.

Es ſeyen 5 fl. 10 kr. in Siebner und Siebenzehner zu bezahlen.

Man gebe x Siebner und y Siebenzehner; ſo machen die x Siebner 7x kr. und die y Siebenzehner 17y kr. aus; alſo iſt

$$7x + 17y = 310$$
$$7x = 310 - 17y$$
$$x = 44 - 2y + \frac{2 - 3y}{7}.$$

Folglich wird x eine ganze Zahl, ſobald $\frac{2-3y}{7}$ eine ganze iſt.

Wir müſſen alſo dieſe Bedingung auszudrücken $\frac{2-3y}{7}$ einer ganzen Zahl, und zwar einer verneinenden ganzen Zahl $-p$ gleich ſetzen, weil $\frac{2-3y}{7}$ allemal eine verneinende Zahl iſt.

Es ſey daher $\frac{2-3y}{7} = -p$; ſo iſt $x = 44 - 2y - p$ und

$$\frac{-2 + 3y}{7} = p$$
$$-2 + 3y = 7p$$
$$3y = 7p + 2$$
$$y = 2p + \frac{p + 2}{3}$$

Es ſey daher $\frac{p+2}{3} = q$; ſo iſt $y = 2p + q$ und

$$p+2 = 3q$$
$$p = 3q - 2$$
$$y = 6q - 4 + q = 7q - 4 \text{ und}$$
$$x = 44 - 14q + 8 - 3q + 2$$
$$x = 54 - 17q;$$

alſo ferner $7q - 4 > 0$, $7q > 4$, $q > \frac{4}{7}$, $q > 0$ und $54 - 17q > 0$, $54 > 17q$, $q < \frac{54}{17}$, $q < 4$.

Folglich iſt			
$q =$	1	2	3
$x = 54 - 17q =$	37	20	3
$y = 7q - 4 =$	3	10	17.

Alſo können 5 fl. 10 kr. auf dreyerley Art in Siebner und Siebenzehner bezahlt werden.

Erſtlich mit 37 Siebnern und 3 Siebenzehnern, ſodann mit 20 Siebnern und 10 Siebenzehnern, und endlich mit 3 Siebnern und 17 Siebenzehnern.

Zertheile 27 in zween Theile, daß der 1te durch 3 und der andere durch 5 theilbar ſey.

Es ſey wegen der 1ten Bedingung der 1te Theil

$$N = 3x,$$

und wegen der 2ten Bedingung der 2te Theil

$$M = 5y; \text{ ſo iſt}$$

$$3x + 5y = 27$$
$$3x = 27 - 5y$$
$$x = 9 - y \frac{-2y}{3}$$

Es ſey daher $\frac{-2y}{3} = -p$; ſo iſt $x = 9 - y - p$ und

$$\frac{2y}{3} = p$$

2y

$$2y = 3p$$

$$y = p + \frac{p}{2}$$

Es ſey daher $\frac{p}{2} = q$; ſo iſt $y = p + q$ und

$$p = 2q$$
$$y = 2q + q = 3q$$
$$x = 9 - 3q - 2q = 9 - 5q$$
$$N = 3x = 27 - 15q$$
$$M = 5y = 15q;$$

alſo ferner $15q > 0$, $q > 0$ ‖ und $27 - 15q > 0$, $27 > 15q$, $q < \frac{27}{15}$, $q < 2$.

Folglich iſt $q = 1$
$$N = 27 - 15q = 12$$
$$M = 15q = 15.$$

Zertheile 800 in zween Theile, daß der 1te durch 11, und der 2te durch 13 theilbar ſey.

Es ſey der 1te $N = 11x$, und der 2te $M = 13y$; ſo iſt $11x + 13y = 800$

$$11x = 800 - 13y$$

$$x = 72 - y + \frac{8 - 2y}{11}.$$

Es ſey daher

$\frac{8 - 2y}{11} = -p$; ſo iſt $x = 72 - y - p$ und

$$\frac{-8 + 2y}{11} = p$$

$$-8 + 2y = 11p$$

$$2y = 11p + 8$$

$$y = 5p + \frac{p + 8}{2}$$

Es ſey daher $\frac{p+8}{2} = q$; ſo iſt $y = 5p + q$ und

$$p + 8 = 2q$$
$$p = 2q - 8$$
$$y = 10q - 40 + q = 11q - 40$$
$$x = 72 - 11q + 40 - 2q + 8 = 120 - 13q$$
$$N = 11x = 1320 - 143q$$
$$M = 13y = 143q - 520;$$

alſo ferner	und
$143q - 520 > 0$	$1320 - 143q > 0$
$143q > 520$	$1320 > 143q$
$q > \frac{520}{143}$	$q < \frac{1320}{143}$
$q > 3$	$q < 10.$

Folglich iſt $q =$	4	5	6	7	8	9
$N = 1320 - 143q =$	748	605	462	319	176	33
$M = 143q - 520 =$	52	195	338	481	624	767.

Zertheile 90 in zween Theile, daß der 1te durch 3 dividirt 2, und der 2te durch 7 dividirt 6 übrig laſſe.

Es ſey wegen der 1ten Bedingung der 1te Theil

$$N = 3x + 2$$

und wegen der 2ten Bedingung der 2te Theil

$$M = 7y + 6;$$

ſo iſt $3x + 2 + 7y + 6 = 90$

$$3x = 82 - 7y$$
$$x = 27 - 2y \frac{+1-y}{3}$$

Es ſey daher

$\frac{+1-y}{3} = -p$; ſo iſt $x = 27 - 2y - p$ und

$$-1 + y = 3p$$
$$y = 3p + 1$$
$$x = 27 - 6p - 2 - p = 25 - 7p$$
$$N = 75 - 21p + 2 = 77 - 21p$$
$$M = 21p + 7 + 6 = 21p + 13;$$

Alſo

alſo ferner $77 - 21p > 0$ und $21p + 13 > 0$

$77 > 21p$ ‖ $21p > -13$

$p < \frac{77}{21}$ ‖ $p > -\frac{13}{21}$

$p < 4$ ‖ $p > -1$

Folglich iſt	$p = 0$	1	2	3
	$N = 77 - 21p = 77$	56	35	14
	$M = 21p + 13 = 13$	34	55	76.

Zween haben zuſammen 200 Dukaten; der 1te zählt die ſeinigen zu 8 und der 2te die ſeinigen zu 9, und bleiben jedem 7 übrig. Wieviel hat ein jeder?

Der 1te habe xmal 8 mehr 7, oder $N = 8x + 7$ und der 2te habe ymal 9 mehr 7, oder $M = 9y + 7$; ſo iſt

$$8x + 7 + 9y + 7 = 200$$
$$8x = 186 - 9y$$
$$x = 23 - y \frac{+2-y}{8}$$

Es ſey daher $\frac{+2-y}{8} = -p$; ſo iſt $x = 23 - y - p$ und

$$-2 + y = 8p$$
$$y = 8p + 2$$
$$x = 23 - 8p - 2 - p = 21 - 9p$$
$$N = 168 - 72p + 7 = 175 - 72p$$
$$M = 72p + 18 + 7 = 72p + 25;$$

alſo ferner $175 - 72p > 0$ ‖ und $72p + 25 > 0$

$175 > 72p$ ‖ $72p > -25$

$p < \frac{175}{72}$ ‖ $p > -\frac{25}{72}$

$p < 3$ ‖ $p > -1$

Folglich iſt	$p = 0$	1	2
	$N = 175 - 72p = 175$	103	31
	$M = 72p + 25 = 25$	97	169.

Einer kauft um 86 fl. Tuch, von einer Sorte die Elle um 8 fl., und von der andern Sorte die Elle um 10 fl. Wieviel ſind es Ellen von jeder Sorte?

Von der 1ten Sorte x Ellen, und von der 2ten y Ellen; alſo koſten jene 8x fl. und dieſe 10y fl.; folglich iſt

$$8x + 10y = 86 \text{ oder}$$
$$4x + 5y = 43$$
$$4x = 43 - 5y$$
$$x = 10 - y \frac{+3-y}{4}$$

Es ſey daher $\frac{+3-y}{4} = -p$; ſo iſt $x = 10 - y - p$ und

$$-3 + y = 4p$$
$$y = 4p + 3$$
$$x = 10 - 4p - 3 - p = 7 - 5p;$$

alſo ferner

$7 - 5p > 0$	und	$4p + 3 > 0$
$7 > 5p$		$4p > -3$
$p < \frac{7}{5}$		$p > -\frac{3}{4}$
$p < 2$		$p > -1$

Folglich iſt		
$p =$	0	1
$x = 7 - 5p =$	7	2
$y = 4p + 3 =$	3	7

Es ſey endlich allgemein dieſe Gleichung

$$bx = c - ay$$

aufzulöſen.

Wenn 1tens $c : b = m + \frac{n}{b}$ und

$a : b = d + \frac{e}{b}$; ſo iſt $x = m - dy \frac{+n-ey}{b}$

Es ſey daher $\frac{+n-ey}{b} = -p$; ſo iſt $x = m - dy - p$ und

$$-n + ey = bp$$
$$ey = bp + n$$

eine

eine Gleichung wie die obige

$$bx = ay + c.$$

Folglich können wir die Werthe von y und p in jener, ebenſo wie die Werthe von x und y in dieſer, nach obiger Regel beſtimmen, dann noch den Werth von x finden, und übrigens wie zuvor verfahren.

Eine Geſellſchaft Männer und Weiber verzehrten 689 kr. Ein Mann zahlte 17 kr. und ein Weib 11 kr. Wieviel Männer und Weiber waren es?

x Weiber und y Männer. Jene zahlten folglich 11x kr. und dieſe 17y kr. Daher iſt

$$11x + 17y = 689$$
$$11x = 689 - 17y$$
$$x = 62 - y \; \frac{+7-6y}{11}.$$

Es ſey daher $\frac{+7-6y}{11} = -p$; ſo iſt $x = 62 - y - p$ und

$$-7+6y = 11p$$
$$6y = 11p + 7;$$

alſo nach obiger Regel

$$11 : 6 = 1 + \frac{5}{6}$$
$$6 : 5 = 1 + \frac{1}{5}$$
$$5 : 1 = 5 + 0$$

Quotienten.	Coefficienten.
1	1
1	$1 \times 1 + 0 = 1$
1	$1 \times 1 + 1 = 2$

Folglich $p = 6q + 7 \times 1 = 6q + 7$
$y = 11q + 7 \times 2 = 11q + 14$
$x = 62 - 11q - 14 - 6q - 7 = 41 - 17q$;

alſo ferner $11q + 14 > 0$, $11q > -14$, $q > -\frac{14}{11}$, $q > -2$ ‖ und $41 - 17q > 0$, $41 > 17q$, $q < \frac{41}{17}$, $q < 3$

Folglich iſt				
$q =$	-1	0	1	2
$x = 41 - 17q =$	58	41	24	7
$y = 11q + 14 =$	3	14	25	36.

Zertheile 1000 in zween Theile, daß der 1te durch 17 getheilt 11, und der 2te durch 19 getheilt 13 übrig laſſe.

Es ſey wegen der 1ten Bedingung der 1te Theil
$$N = 17x + 11$$
und wegen der 2ten Bedingung der 2te Theil
$$M = 19y + 13;$$

ſo iſt $17x + 11 + 19y + 13 = 1000$
$17x = 976 - 19y$
$$x = 57 - y \frac{+7 - 2y}{17}$$

Es ſey daher $\frac{+7-2y}{17} = -p$; ſo iſt $x = 57 - y - p$ und
$-7 + 2y = 17p$
$2y = 17p + 7$ und

		Quot.	Coeff.
$17 : 2 = 8 + \frac{1}{2}$	‖	1	1
$2 : 1 = 2 + 0$	‖	8	$8 \times 1 + 0 = 8$

Folglich $p = 2q - 7 \times 1 = 2q - 7$
$y = 17q - 7 \times 8 = 17q - 56$
$x = 57 - 17q + 56 - 2q + 7 = 120 - 19q$
$N = 2040 - 323q + 11 = 2051 - 323q$
$M = 323q - 1064 + 13 = 323q - 1051$;
alſo

alſo ferner $2051 - 323q > 0$	und $323q - 1051 > 0$
$2051 > 323q$	$323q > 1051$
$q < \frac{2051}{323}$	$q > \frac{1051}{323}$
$q < 7$	$q > 3$

Folglich iſt	$q = 4$	5	6
$N = 2051 - 323q =$	759	436	113
$M = 323q - 1051 =$	241	564	$887.$

Einer kaufte um 1673 Dukaten Pferde, Türken und Siebenbirger, den Siebenbirger für 19, und den Türken für 31 Dukaten. Wieviel waren es Siebenbürger und Türken?

Es ſey die Anzahl der Siebenbirger x und die Anzahl der Türken y: ſo haben jene 19x und dieſe 31y Dukaten gekoſtet; folglich iſt

$$19x + 31y = 1673$$
$$19x = 1673 - 31y$$
$$x = 88 - y\frac{+1 - 12y}{19}$$

Es ſey daher $\frac{+1 - 12y}{19} = -p$; ſo iſt $x = 88 - y - p$ und

$$-1 + 12y = 19p$$
$$12y = 19p + 1 \text{ und}$$

	Quot.	Coeff.
$19 : 12 = 1 + \frac{7}{12}$	1	1
$12 : 7 = 1 + \frac{5}{7}$	2	$2 \times 1 + 0 = 2$
$7 : 5 = 1 + \frac{2}{5}$	1	$1 \times 2 + 1 = 3$
$5 : 2 = 2 + \frac{1}{2}$	1	$1 \times 3 + 2 = 5$
$2 : 1 = 2 + 0$	1	$1 \times 5 + 3 = 8$

Folglich $p = 12q + 1 \times 5 = 12q + 5$

$y = 19q + 1 \times 8 = 19q + 8$

$x = 88 - 19q - 8 - 12q - 5 = 75 - 31q;$

alſo ferner $19q + 8 > 0$	und $75 - 31q > 0$
$19q > -8$	$75 > 31q$
$q > -\frac{8}{19}$	$q < \frac{75}{31}$
$q > -1$	$q < 3$

Folg-

Folglich iſt	0	1	2
$x = 75 - 31q =$	75	44	13
$y = 19q + 8 =$	8	27	46

143. Wenn wir von dieſen zwoen Gleichungen

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

die erſte mit c und die zwote mit a multipliciren; ſo werden ſie in folgende verwandelt

$$acx + bcy = cp$$
$$acx + ady = aq,$$

worinn die Unbekannte x jedesmal mit eben demſelben Coefficienten ac erſcheinet.

Iſt a in c enthalten oder

$$c = an;$$

ſo wird x in beeden Gleichungen ſchon den nämlichen Coefficienten $an = c$ bekommen, wenn wir nur die erſte Gleichung mit n multipliciren: und haben die Coefficienten a und c einen gemeinen Factor n, oder iſt

$$a = nf \text{ und}$$
$$c = ng;$$

ſo wird x abermal in beeden Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalten, wenn wir die erſte nur mit g und die zwote nur mit f multipliciren. Denn wenn

$$a = nf \text{ und}$$
$$c = ng; \text{ ſo iſt}$$
$$ag = nfg \text{ und}$$
$$cf = nfg.$$

Zieht man nun zwo Gleichungen, worinn eine Unbekannte mit dem nämlichen Coefficienten vorkömmt, voneinander ab, da dieſer Coefficient in beeden Gleichungen von derſelben Bezeichnung iſt, oder addirt dieſelben, da dieſer Coefficient eine entgegengeſetzte Bezeichnung hat; ſo kömmt

kömmt man allemal auf eine Gleichung, welche jene Unbekannte nicht mehr enthält.

So giebt $acx + bcy = cp$

von $acx + ady = aq$ abgezogen,

$$ady - bcy = aq - cp$$

eine Gleichung, welche von der Unbekannten x befreyt iſt: und iſt $bcy - acx = cp$ und

$ady + acx = aq$;

ſo geben dieſe Gleichungen zuſammenaddirt

$$bcy + ady = cp + aq$$

abermal eine Gleichung, worinn die Unbekannte x nicht mehr vorkömmt.

Wir haben alſo wieder einen neuen allgemeinen Weg aus zwoen Gleichungen von mehrern Unbekannten eine 3te zu finden, welche um eine Unbekannte weniger, als die vorigen enthält. Wir wollen in folgendem Beyſpiele einen Gebrauch davon machen.

144. Führet nun eine Aufgabe auf zwo Gleichungen, jede von drey Unbekannten; ſo können wir **1tens** daraus eine herleiten, welche nur zwo Unbekannten enthält, **2tens** vermittelſt dieſer Gleichung die Werthe dieſer zwoen Unbekannten, wie zuvor, durch eine allgemeine ganze Zahl ausdrücken, **3tens** dieſe Werthe anſtatt der zwo Unbekannten in eine der erſten zwoen Gleichungen ſetzen und dadurch auch den Werth der dritten Unbekannten durch die nämliche allgemeine ganze Zahl beſtimmen, und **4tens** endlich aus den Werthen dieſer drey Unbekannten noch die Gränzen jener allgemeinen ganzen Zahl finden, folglich alle mögliche Auflöſungen einer ſolchen Aufgabe angeben.

Man verlangt 30 Stücke von drey Sorten Münzen, Groſchen, Siebner und Siebenzehner, welche zuſammen 6 fl. ausmachen ſollen.

Es ſey die Anzahl der Groſchen x, jene der Siebner y und jene der Siebenzehner z; ſo machen die x

Gro-

Groſchen 3x Kreußer, die y Siebner 7y Kreußer und die z Siebenzehner 17z Kreußer aus;

alſo iſt $x + y + z = 30$ und

$3x + 7y + 17z = 360$; die erſte Gleichung mit 3 multiplicirt

giebt $3x + 3y + 3z = 90$; dieſe von der vorigen abgezogen, giebt

$$4y + 14z = 270 \text{ oder}$$
$$2y + 7z = 135$$
$$2y = 135 - 7z$$
$$y = 67 - 3z \frac{+1-z}{2}.$$

Es ſey daher

$\frac{+1-z}{2} = -p$; ſo iſt $y = 67 - 3z - p$ und

$$-1 + z = 2p$$
$$z = 2p + 1$$
$$y = 67 - 6p - 3 - p = 64 - 7p$$
$$x + 64 - 7p + 2p + 1 = 30$$
$$x = 5p - 35;$$

alſo ferner

$$\begin{array}{l|l|l} 5p - 35 > 0 & 64 - 7p > 0 & \text{und } 2p + 1 > 0 \\ 5p > 35 & 64 > 7p & 2p > -1 \\ p > \frac{35}{5} & p < \frac{64}{7} & p > -\frac{1}{2} \\ p > 7 & p < 10 & p > -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{Folglich iſt} & p = 8 & 9 \\ & x = 5p - 35 = 5 & 10 \\ & y = 64 - 7p = 8 & 1 \\ & z = 2p + 1 = 17 & 19. \end{array}$$

Ich habe 22 fl. in Groſchen, Siebnern und Siebenzehnern. Wenn ich die Anzahl der Groſchen mit 4, jene der Siebner mit 3, und jene der Siebenzehner mit 2 multiplicire; ſo machen dieſe Producte zuſammen 286 aus. Wieviel Groſchen, Siebner und Siebenzehner habe ich?

x Groſchen, y Siebner und z Siebenzehner.

Alſo

Alſo iſt $3x+7y+17z=1320$ und
$4x+3y+2z=286$; die 1te Gleichung mit 4 und die 2te mit 3 multiplicirt, giebt

$12x+28y+68z=5280$
$12x+9y+6z=858$; dieſe von der obern abgezogen, giebt $19y+62z=4422$

$19y=4422-62z$

$$y=232-3z\frac{+14-5z}{19}.$$

Es ſey daher

$\frac{+14-5z}{19}=-p$; ſo iſt $y=232-3z-p$ und

$-14+5z=19p$

$5z=19p+14$ und

	Quot.	Coeff.
$19:5=3+\frac{4}{5}$	1	1
$5:4=1+\frac{1}{4}$	1	$1\times1+0=1$
$4:1=4+0$	3	$3\times1+1=4$

alſo $p=5q+14\times1=5q+14$

$z=19q+14\times4=19q+56$

$y=232-57q-168-5q-14=50-62q$

$4x+150-186q+38q+112=286$

$4x=286-150-112+186q-38q$

$4x=148q+24$, und $x=37q+6$;

alſo ferner

$37q+6>0$	$50-62q>0$	$19q+56>0$
$37q>-6$	$50>62q$	$19q>-56$
$q>-\frac{6}{37}$	$q<\frac{50}{62}$	$q>-\frac{56}{19}$
$q>-1$	$q<1$	$q>-3$.

Folglich iſt	
$q=$	0
$x=37q+6=$	6
$y=50-62q=$	50
$z=19q+56=$	56.

Hun-

Hundert Perſonen verzehrten 100 fl., ein Mann $3\frac{1}{2}$ fl., ein Weib $1\frac{1}{3}$ fl. und ein Kind $\frac{1}{2}$ fl. Wieviel Männer, Weiber und Kinder waren es?

x Männer, y Weiber und z Kinder; daher iſt

$$x + y + z = 100, \text{ und}$$

$$3\tfrac{1}{2}x + 1\tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}z = 100 \text{ oder}$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{4y}{3} + \frac{z}{2} = 100$$

$$7x + \frac{8y}{3} + z = 200$$

$21x + 8y + 3z = 600$; die 1te Gleichung 3mal genommen, giebt

$3x + 3y + 3z = 300$; dieſe von der vorigen abgezogen, giebt $18x + 5y = 300$

$$y = 60 - 3x - \frac{3x}{5}.$$

Es ſey daher

$$\frac{-3x}{5} = -p; \text{ ſo iſt } y = 60 - 3x - p \text{ und}$$

$$3x = 5p$$

$$x = p + \frac{2p}{3}.$$

Es ſey daher

$$\frac{2p}{3} = q; \text{ ſo iſt } x = p + q \text{ und}$$

$$2p = 3q$$

$$p = q + \frac{q}{2}.$$

Es ſey daher $\frac{q}{2} = r$; ſo iſt $p = q + r$ und

$$q = 2r$$

$$p = 2r + r = 3r$$

$$x = 3r + 2r = 5r$$

$$y = 60 - 15r - 3r = 60 - 18r$$

$z + 60 - 18r + 5r = 100$
$z = 100 - 60 + 18r - 5r$
$z = 13r + 40.$

Daher iſt ferner

$13r + 40 > 0$	$5r > 0$	$60 - 18r > 0$
$13r > -40$	$r > 0$	$60 > 18r$
$r > -\frac{40}{13}$		$r < \frac{60}{18}$
$r > -4$		$r < 4.$

Folglich iſt

$r =$	1	2	3
$x = 5r =$	5	10	15
$y = 60 - 18r =$	42	24	6
$y = 13r + 40 =$	53	66	79.

Ein Wirth hat einen 24 kr., einen 18 kr. und einen 10 kr. Wein. Nun ſoll er von dieſen drey Weinen 30 Maaß, die Maaß für 16 kr. hergeben. Wieviel hat er von jeder Sorte zu geben?

Von dem 10 kr. Wein x Maaß, von dem 18 kr. Wein y Maaß, und von dem 24 kr. Wein z Maaß; ſo iſt $x + y + z = 30$ und

$10x + 18y + 24z = 480$; die 1te Gleichung 10mal genommen,

giebt $10x + 10y + 10z = 300$; dieſe von der vorigen abgezogen, giebt $8y + 14z = 180$ oder

$4y + 7z = 90$
$4y = 90 - 7z$
$y = 22 - z \frac{+2 - 3z}{4}.$

Es ſey daher

$\frac{+2 - 3z}{4} = -p$; ſo iſt $y = 22 - z - p$ und
$-2 + 3z = 4p$
$3z = 4p + 2$ und

	Quot.	Coeff.
$4 : 3 = 1 + \frac{1}{3}$	1	1
$3 : 1 = 3 + 0$	1	$1 \times 1 + 0 = 1$

 alſo

alſo $p = 3q - 2 \times 1 = 3q - 2$

$$z = 4q - 2 \times 1 = 4q - 2$$
$$y = 22 - 4q + 2 - 3q + 2 = 26 - 7q$$
$$x + 26 - 7q + 4q - 2 = 30$$
$$x = 30 - 26 + 2 + 7q - 4q = 3q + 6.$$

Daher iſt ferner

$3q + 6 > 0$	$26 - 7q > 0$	und $4q - 2 > 0$
$3q > -6$	$26 > 7q$	$4q > 2$
$q > -\frac{6}{3}$	$q < \frac{26}{7}$	$q > \frac{2}{4}$
$q > -2$	$q < 4$	$q > 0.$

Folglich iſt			
$q =$	1	2	3
$x = 3q + 6 =$	9	12	15
$y = 26 - 7q =$	19	12	5
$z = 4q - 2 =$	2	6	10.

Ein Münzmeiſter hat dreyerley Silber, 9löthiges, 11 = und 15löthiges. Nun ſoll er von dieſen 3 Sorten eine Maſſe von 34 Mark zuſammenſchmelzen, die 12löthig ſey. Wieviel Mark ſoll er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme x Mark vom 9löthigen, y Mark vom 11löthigen, und z Mark vom 15löthigen; ſo enthalten dieſe x Mark 9x Loth, dieſe y Mark 11y Loth, dieſe z Mark 15z Loth, und jene 34 Mark $12 \times 34 = 408$ Loth fein Silber; folglich iſt

$x + y + z = 34$ und

$9x + 11y + 15z = 408$; die 1te Gleichung 9mal genommen,

giebt $9x + 9y + 9z = 306$; dieſe von der vorigen abgezogen, giebt $2y + 6z = 102$

$$2y = 102 - 6z$$
$$y = 51 - 3z \text{ und}$$
$$x + 51 - 3z + z = 34$$
$$x = 34 - 51 + 3z - z = 2z - 17.$$

Daher

Daher iſt ferner

$2z - 17 > 0$	$51 - 3z > 0$	$z > 0$
$2z > 17$	$51 > 3z$	
$z > \frac{17}{2}$	$z < \frac{51}{3}$	
$z > 8$	$z < 17$	

Folglich iſt $z=$	9	10	11	12	13	14	15	16
$y=51-3z=$	24	21	18	15	12	9	6	3
$x=2z-17=$	1	3	5	7	9	11	13	15.

Von der Rechnung mit Exponenten.

145.

Wenn man 1 mehrmal mit einer Zahl multipliciret; ſo heißen die Producte, welche zum Vorſchein kommen, Potenzen von dieſer Zahl, die Zahl ſelbſt aber Wurzel von dieſen Producten.

So iſt $1 \times 2 = 2$ die 1te Potenz von 2, und 2 die 1te Wurzel von 2,

$1 \times 2 \times 2 = 4$ die 2te Potenz von 2, und 2 die 2te Wurzel von 4,

$1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ die 3te Potenz von 2, und 2 die 3te Wurzel von 8,

$8 \times 2 = 16$ die 4te Potenz von 2, und 2 die 4te Wurzel von 16,

$16 \times 2 = 32$ die 5te Potenz von 2, und 2 die 5te Wurzel von 32,

$32 \times 2 = 64$ die 6te Potenz von 2, und 2 die 6te Wurzel von 64, und allgemein

$1 \times a = a$ die 1te Potenz von a, und a die 1te Wurzel von a,

$1 \times a \times a = aa$ die 2te Potenz von a, und a die 2te Wurzel von aa,

$1 \times a \times a \times a = aaa$ die 3te Potenz von a, und a die 3te Wurzel von aaa,

$1 \times a \times a \times a \times a = aaaa$ die 4te Potenz von a, und a die 4te Wurzel von aaaa,

$aaaa \times a = aaaaa$ die 5te Potenz von a, und a die 5te Wurzel von aaaaa.

Es iſt nämlich die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te Potenz von einer Zahl nichts anders, als 1 einmal, zweymal, dreymal, viermal, fünfmal mit dieſer Zahl multipliciret: und die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te Wurzel von einer vorgelegten Zahl iſt jene Zahl, deren 1te, 2te, 3te, 4te, 5te Potenz der vorgelegten Zahl gleich wird.

So iſt die 2te Wurzel von $9 = 3$, weil $1 \times 3 \times 3 = 9$, gleich der 2ten Potenz von 3.

Die 3te Wurzel von $125 = 5$, weil $1 \times 5 \times 5 \times 5 = 125$, gleich der 3ten Potenz von 5.

Wenn eine höhere Potenz einer algebraiſchen Zahl auszudrücken iſt, wie die 10te oder die 15te von a; ſo ſollte man zehn a oder funfzehn a unmittelbar nacheinander ſchreiben: allein dieſe Art die Potenzen auszudrücken iſt ſehr unbequem; daher hat man angenommen, man wolle durch eine kleine Ziffer rückwärts über die Zahl geſetzt andeuten, wie oft dieſe unmittelbar nacheinander geſchrieben ſeyn ſoll.

So iſt $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$, $a^4 = aaaa$, $a^5 = aaaaa$, und $a^n =$ a nmal unmittelbar nacheinander geſetzt.

Oder a^1, a^2, a^3, a^4 und a^n heißt die 1te, 2te, 3te, 4te und nte Potenz von a.

Man hat ferner angenommen, die Wurzel einer Größe dadurch anzudeuten, daß man derſelben dieſes Zeichen ($\sqrt{}$) vorausſchreibt, und durch eine Ziffer in deſſen Oeffnung geſetzt ausdrückt, von der wievielten Wurzel die Rede iſt.

So heißt, $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ oder $\sqrt[n]{a}$ die 1te, 2te, 3te, 4te oder nte Wurzel von a, oder jene Zahl, durch welche 1 einmal, zweymal, dreymal, viermal oder

nmal

nmal multipliciret gleich a wird. Dieſe Ziffern, mit welchen man die Potenzen und Wurzeln andeutet, heißen **Exponenten**, jene **Exponenten der Potenz**, und dieſe **Exponenten der Wurzel**.

Die Methode alle Rechnungsarten mit denſelben Größen von verſchiedenen Exponenten der Potenz oder Wurzel zu verrichten, heißt die Rechnung mit Exponenten.

Wir wollen hier die Regeln davon zu entdecken ſuchen.

146. Man ſoll die Summe oder den Unterſcheid von a^3 und a^2 finden. Weil a^3 die 3te Potenz, und a^2 die 2te Potenz von a bedeutet: ſo ſind es ungleichnamige Größen; ſie können alſo nicht anders, als durch Zeichen addiret, oder voneinander abgezogen werden.

Daher iſt ihre Summe $a^3 + a^2$ und ihr Unterſcheid $a^3 - a^2$, oder $a^2 - a^3$, nachdem a^2 oder a^3 abzuziehen iſt.

Es verhält ſich anders, wenn die Exponenten von a einerley ſind.

Denn $a^3 + a^3 = 2a^3$; $a^n + a^n = 2a^n$; $2a^4 + 5a^4 + 6a^4 = 13a^4$; $ca^n + da^n = (c + d)a^n$; und $9a^5 - 4a^5 = 5a^5$; $ca^n - da^n = (c - d)a^n$ u. ſ. f.

147. Es iſt $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3}$
$a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7 = a^{3+4}$
$a^1 \times a^2 = a \times aa = aaa = a^3 = a^{1+2}$, und allgemein
$a^m \times a^n =$ a mmal geſchrieben $\times$ a nmal geſchrieben, alſo $=$ a $(m + n)$mal geſchrieben, oder $= a^{m+n}$. Daher die

1te Regel.

Der Exponent des Products iſt gleich der Summe der Exponenten ſeiner Factoren.

Oder $a^m \times a^n = a^{m+n}$

148. Weil der Exponent des Products allemal die Summe der Exponenten der Factoren iſt; ſo iſt der Exponent eines jeden Factors auch gleich dem Exponenten des Products weniger dem Exponenten des andern Factors. Daher die

2te Regel.

Der Exponent des Quotienten iſt gleich dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Theilers.

Oder $a^m : a^n = a^{m-n}$, alſo ferner

$$a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$$
$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$$
$$a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3$$
$$a^7 : a^3 = a^{7-3} = a^4$$
$$a^{m+n} : a^m = a^{m+n-m} = a^n \text{ u. ſ. f.}$$

Setzen wir den Exponenten des Theilers gleich dem Exponenten des Dividends; ſo iſt

$$a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0, \text{ oder allgemein}$$
$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

Es iſt aber jede Größe durch ſich ſelbſt dividiret allemal $= 1$, oder $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$. Daher iſt $a^0 = 1$; oder die

3te Regel.

Jede Größe zu der 0ten Potenz erhoben iſt gleich Eins.

Eben dieſes folgt auch unmittelbar aus den Begriffen der Potenzen und deren Exponenten. Denn weil der Exponent n einer jeden Größe a^n nichts anders anzeigt, als wie oft 1 mit dieſer Größe a zu multipliciren iſt, damit

a^n

Digitized by Google

a^2 zum Vorſchein komme; ſo muß man, um a^0 zu erhalten, 1 niemal mit a multipliciren; folglich iſt $a^0 = 1$.

Setzen wir den Exponenten des Theilers größer, als den Exponenten des Dividends; ſo iſt z. B.

$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$; allein es iſt auch

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2 : a^2}{a^5 : a^2} = \frac{1}{a^{5-2}} = \frac{1}{a^3}, \text{ alſo}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}: \text{ oder allgemein}$$

$a^m : a^{m+q} = a^{m-m-q} = a^{-q}$, oder auch

$$a^m : a^{m+q} = \frac{a^m}{a^{m+q}} = \frac{a^m : a^m}{a^{m+q} : a^m} = \frac{1}{a^{m+q-m}} = \frac{1}{a^{+q}};$$

alſo iſt auch

$$a^{-q} = \frac{1}{a^{+q}}; \text{ oder die}$$

4te Regel.

Eine jede Größe zu einer verneinenden Potenz erhoben iſt gleich 1 dividirt durch dieſelbe Größe zu derſelben bejahenden Potenz erhoben.

Ebendieſes folgt auch unmittelbar aus den Begriffen der Potenzen und deren Exponenten. Denn weil der Exponent q einer jeden Potenz a^q, als bejahend, bedeutet, wie oft 1 mit a zu multipliciren iſt; ſo muß derſelbe als verneinend das Entgegengeſetzte bedeuten, das iſt, bedeuten, wie oft 1 mit a zu dividiren ſey.

Folglich iſt $a^{-q} = \frac{1}{a^{+q}}$.

Es ſey nun der Exponent des Theilers wieder größer, als der Exponent des Dividends, und beede verneinend; ſo iſt 3. B.

$a^{-3} : a^{-5} = a^{-3+5} = a^{+2}$; es iſt aber auch

$$a^{-3} : a^{-5} = \frac{a^{-3}}{a^{-5}} = \frac{a^{-3} : a^{-3}}{a^{-5} : a^{-3}} = \frac{1}{a^{-5+3}} = \frac{1}{a^{-2}};$$

oder allgemein

$a^{-m} : a^{-m-q} = a^{-m+m+q} = a^{+q}$; oder auch

$$a^{-m} : a^{-m-q} = \frac{a^{-m}}{a^{-m-q}} = \frac{a^{-m} : a^{-m}}{a^{-m-q} : a^{-m}} = \frac{1}{a^{-m-q+m}} = \frac{1}{a^{-q}};$$

alſo iſt auch

$a^{+q} = \frac{1}{a^{-q}}$; oder die

5te Regel.

Eine jede Größe zu einer bejahenden Potenz erhoben iſt gleich 1 dividirt durch dieſelbe Größe zu derſelben verneinenden Potenz erhoben.

Ebendieſes folgt auch aus der 4ten Regel. Denn weil $a^{+q} = \frac{1}{a^{-q}}$; ſo iſt $\frac{1}{a^{-q}} = 1 : a^{-q} = 1 : \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{1}$ $= a^{+q}$.

Aus der 4ten und 5ten Regel folgt ferner, daß

1tens $a^n b^{-q} = a^n \times \frac{1}{b^{+q}} = \frac{a^n}{b^q}$

2tens $a^n b^{-q} = \frac{1}{a^{-n}} \times b^{-q} = \frac{b^{-q}}{a^{-n}}$

3tens $a^n b^{-q} = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^q} = \frac{1}{a^{-n} b^q}$; alſo iſt

$a^n b^{-q} = \frac{a^n}{b^q} = \frac{b^{-q}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} b^q}$; oder die

6te

6te Regel.

Man kann in jedem Ausdrucke jeden Factor mit verändertem Zeichen ſeines Exponenten vom Zähler in den Nenner, oder von dieſem in jenen überſetzen, ohne daß der Werth des Ausdruckes verändert wird.

149. Sind nun dergleichen Größen wieder zu Potenzen zu erheben; ſo iſt

$$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^{3\times 2} = a^6$$
$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3} = a^6$$
$$(a^4)^2 = a^4 \times a^4 = a^{4+4} = a^{4\times 2} = a^8$$
$$(a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2+2} = a^{2\times 4} = a^8, \text{ und}$$
$$(a^n)^q = a^n \text{ qmal geſchrieben} = a^{n\times q} = a^{nq}; \text{ oder die}$$

7te Regel.

Man bekömmt jede Potenz von einer Größe, wenn man den Exponenten der Größe mit dem Exponenten der Potenz multipliciret.

150. Iſt von a^3 die 2te Wurzel auszuziehen; ſo iſt jene Zahl zu finden, welche, zur 2ten Potenz erhoben, gleich wird a^3. Dieſe Zahl ſey a^x; ſo iſt

$$(a^x)^2 = a^3 \text{ oder}$$
$$a^{2x} = a^3, \text{ alſo}$$
$$2x = 3 \text{ und}$$
$$x = \tfrac{3}{2}, \text{ folglich}$$
$$\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}.$$

Und iſt allgemein von a^n die qte Wurzel auszuziehen; ſo iſt jene Zahl zu finden, welche, zur qten Potenz erhoben, gleich wird a^n. Dieſe Zahl ſey a^x; ſo iſt

$$(a^x)^q = a^n \text{ oder}$$
$$a^{qx} = a^n, \text{ alſo}$$

$$qx = n \text{ und}$$

$$x = \frac{n}{q}\text{, folglich}$$

$$\sqrt[q]{a^n} = a^{\frac{n}{q}}\text{; oder die}$$

8te Regel.

Man erhält jede Wurzel von einer Größe, wenn man den Exponenten der Größe durch den Exponenten der Wurzel dividiret.

Folglich können wir jeden Exponenten der Wurzel in einen gebrochenen Exponenten der Potenz verwandeln:

$$\text{denn } \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}\text{; } \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}\text{; } \sqrt[2]{a^5} = a^{\frac{5}{2}}\text{;}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\text{; } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\text{; u. ſ. f.;}$$

und umgekehrt, jeden gebrochenen Exponenten der Potenz durch einen ganzen der Potenz, und einen ganzen der Wurzel ausdrücken: denn der Nenner des Bruches iſt allemal der Exponent der Wurzel, und der Zähler deſſelben der Exponent der Potenz. So iſt

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}\text{; } a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}\text{; } a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}\text{, und}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ u. ſ. f.}$$

151. Um die vorigen Rechnungsarten mit Größen, welche verſchiedene Exponenten der Wurzel haben, zu verrichten, kann alſo folgende Regel angegeben werden.

9te Regel.

Man verändere die Exponenten der Wurzel in gebrochene Exponenten der Potenz, und verfahre nach den Regeln für die Exponenten der Potenz.

So ist $\sqrt[2]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$

$= \sqrt[6]{a^5}$;

$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{a} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}} = a^{\frac{7}{6}}$

$= \sqrt[6]{a^7}$;

$\sqrt[n]{a^q} \times \sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{q}{n}} \times a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{q}{n}+\frac{p}{m}} = a^{\frac{mq+np}{mn}}$

$= \sqrt[mn]{a^{mq+np}}$:

$\sqrt[2]{a^3} : \sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}} = a^{\frac{6}{4}-\frac{5}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt[4]{a}$;

$\sqrt[2]{a} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$

$= \sqrt[6]{a}$;

$\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{a^q} = a^{\frac{p}{n}} : a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{p}{n}-\frac{q}{m}} = a^{\frac{mp-nq}{mn}}$

$= \sqrt[mn]{a^{mp-nq}}$:

$(\sqrt[3]{a^4})^2 = (a^{\frac{4}{3}})^2 = a^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{a^8}$;

$(\sqrt[4]{a^3})^5$

$$(\sqrt[4]{a^3})^5 = (a^{\frac{3}{4}})^5 = a^{\frac{15}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}};$$

$$(\sqrt[n]{a^q})^m = (a^{\frac{q}{n}})^m = a^{\frac{qm}{n}} = \sqrt[n]{a^{qm}}:$$

$$\sqrt[4]{(\sqrt[3]{a^2})} = \sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a};$$

$$\sqrt[2]{(\sqrt[2]{a^8})} = \sqrt[2]{a^{\frac{8}{2}}} = \sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2;$$

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^q})} = \sqrt[m]{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{q}{mn}} = \sqrt[mn]{a^q};$$

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[-4]{a^5} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{5}{4}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}} = a^{\frac{8}{12}-\frac{15}{12}}$$

$$= a^{-\frac{7}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7}}:$$

$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}} = a^{\frac{8}{12}-\frac{15}{12}}$$

$$= a^{-\frac{7}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^7}}:$$

$$(\sqrt[3]{a^{-2}})^2 = (a^{-\frac{2}{3}})^2 = a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = (a^{-\frac{3}{2}})^2 = a^{-3}$$

$$= \frac{1}{a^3}:$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[2]{a^5}}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}\right)} = \sqrt[3]{(a^{-\frac{5}{2}})}$$

$$= a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$$ u. ſ. f.

Wenn man ſchreibt, $\sqrt{a}$, oder ſpricht **Wurzel von** a; ſo iſt allemal $\sqrt[2]{a}$, **die zweyte Wurzel von** a, zu verſtehen.

Ebenfalls pflegt man öfters anſtatt 2te Potenz, **Quadrat**, anſtatt 3te Potenz, **Cubus** oder Würfel, und anſtatt 4te Potenz, **Biquadrat**, wie auch anſtatt 2te, 3te, 4te Wurzel, die **Quadrat**, **Cubik**- und Biquadratwurzel zu ſagen.

152. Die Potenzen von $+a$ ſind der Ordnung nach

$$+a,\ +a^2,\ +a^3,\ +a^4,\ +a^5,\ +a^6,\ +a^7,\ +a^8,\ +a^9;\ \text{u. ſ. f.}$$

Jene von $-a$ aber ſind

$$-a,\ +a^2,\ -a^3+a^4,\ -a^5,\ +a^6,\ -a^7,\ +a^8,\ -a^9;\ \text{u. ſ. f.}$$

Das iſt, die Potenzen von einer bejahenden Größe $+a$ ſind allemal bejahend; von einer verneinenden Größe $-a$ aber ſind die Potenzen, deren Exponent eine gerade Zahl 2, 4, 6, 8 iſt, bejahend, und jene, deren Exponent eine ungerade Zahl 1, 3, 5, 7, 9 iſt, verneinend. Daher iſt 1tens die Wurzel, welche einen ungeraden Exponenten hat, allemal von derſelben Bezeichnung, als die Größe, von deren Wurzel man redet. So iſt $\sqrt[3]{a^3}=+a$, und $\sqrt[3]{-a^3}=-a$; $\sqrt[5]{a^5}=a$, und $\sqrt[5]{-a^5}=-a$; $\sqrt[7]{a^7}=a$, und $\sqrt[7]{-a^7}=-a$; u. ſ. f.

Zweytens iſt die Wurzel, welche einen geraden Exponenten hat, ſowohl bejahend, als verneinend, wenn die Größe, von deren Wurzel man redet, bejahend iſt.

So iſt $\sqrt[2]{a^2}=\pm a$; denn $+a\times+a=+a^2$, und $-a\times-a=+a^2$:

$\sqrt[4]{a^4} = \pm a$; denn $(-a)^4$ ſowohl als $(+a)^4$ iſt allemal $= a^4$:

und ebenſo iſt $\sqrt[6]{a^6} = \pm a$; $\sqrt[8]{a^8} = \pm a$ u. ſ. f.

Drittens iſt die Wurzel, welche einen geraden Exponenten hat, unmöglich, ſo oft die Größe, von deren Wurzel man redet, verneinend iſt. So ſind

$\sqrt[2]{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[8]{-a^8}$ unmögliche Größen: Denn eine ſolche Wurzel iſt nicht $+a$, weil die 2te, 4te, 6te, 8te Potenz von $+a$ nie $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, $-a^8$, ſondern $+a^2$, $+a^4$, $+a^6$, $+a^8$ iſt: ſie iſt auch nicht $-a$; denn die 2te, 4te, 6te, 8te Potenz von $-a$ iſt $+a^2$, $+a^4$, $+a^6$, $+a^8$, und nicht $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, $-a^8$: noch weniger iſt ſie eine andere Größe $+b$ oder $-b$, denn die 2te, 4te, 6te, 8te Potenz von $\pm b$ iſt allemal $+b^2$, $+b^4$, $+b^6$, $+b^8$ und gewiß nicht $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, $-a^8$.

Es iſt wohl zu merken, daß nicht die Größen $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, $-a^8$, ſondern nur $\sqrt[2]{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[8]{-a^8}$ unmöglich ſind.

153. Nun ſind die bejahenden Größen, welche unter dem Wurzelzeichen ſtehen, und von denen man die angezeigte Wurzel genau angeben kann, noch von jenen zu unterſcheiden, von denen die Wurzel nie vollkommen kann angegeben werden; jene werden **Rational**- dieſe **Irrationalgrößen** genennet. So ſind $\sqrt[2]{a^2}$, $\sqrt[3]{a^9}$, $\sqrt[2]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6}$, $\sqrt[2]{9}$, $\sqrt[3]{8}$ Rationalgrößen;

$$\text{denn } \sqrt[2]{a^2} = a,\ \sqrt[3]{a^9} = a^3,\ \sqrt[2]{a^4} = a^2,$$
$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,\ \sqrt[2]{9} = 3,\ \sqrt[3]{8} = 2.$$

Die-

Dieſe aber $\sqrt[2]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[n]{a^q}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[3]{a^7}$ ſind Irrationalgrößen; indem die Werthe davon nie vollkommen können gefunden werden.

154. Wenn ein Product ab zu einer Potenz zu erheben iſt; ſo wird

$(ab)^2 = ab \times ab = aabb = a^2b^2$,
$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaabbb = a^3b^3$
$(ab)^4 = ab \times ab \times ab \times ab = aaaabbbb = a^4b^4$
und endlich
$(ab)^n = a^nb^n$. Daher kömmt die

10te Regel.

Jede Potenz von einem Producte iſt gleich dem Producte aus den gleichnamigen Potenzen ſeiner Factoren.

155. Wenn von einem Producte ab eine Wurzel auszuziehen iſt; ſo wird $\sqrt[n]{ab} = (ab^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$. Daher fließt die

11te Regel.

Jede Wurzel von einem Producte iſt gleich dem Producte aus den gleichnamigen Wurzeln ſeiner Factoren.

Ebendaher iſt $\sqrt[n]{a^nb} = a \times \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$.
Wenn alſo ein Product unter jedem Wurzelzeichen einen Factor enthält, von dem ſich die gleichnamige Wurzel ausziehen läßt; ſo kann dieſer Factor unter dem

Wur-

Wurzelzeichen weggelaſſen, und deſſen gleichnamige Wurzel als ein Factor vor das Wurzelzeichen geſchrieben werden. Oder umgekehrt, kann jeder Factor vor dem Wurzelzeichen weggelaſſen, und deſſen mit der Wurzel gleichnamige Potenz als ein Factor unter das Wurzelzeichen geſchrieben werden.

156. Weil $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$: ſo erhält man das Product aus zween gleichnamigen Wurzelgrößen, wenn man die Größen mit einander multipliciret, und das Product wieder unter das gleichnamige Wurzelzeichen bringt.

Da nun alle Exponenten der Wurzel in gebrochene Exponenten der Potenz können verwandelt werden; ſo geben dieſe unter gleiche Nenner gebracht, und wieder in Exponenten der Wurzel verwandelt, auch allemal gleichnamige Wurzelgrößen, von denen ſich ihr Product, wie zuvor, angeben läßt. So iſt $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{b^3} = a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{6}} \times b^{\frac{9}{6}} = \sqrt[6]{a^4} \times \sqrt[6]{b^9} = \sqrt[6]{a^4 b^9}$.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ zu einer Potenz zu erheben iſt; ſo wird

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Hieraus folgt die

12te Regel.

Jede Potenz eines Bruches iſt gleich der gleichnamigen Potenz des Zählers dividirt durch die gleichnamige Potenz des Nenners.

158. Wenn von einem Bruche $\frac{a}{b}$ eine Wurzel auszuziehen iſt; ſo wird

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Daher kömmt die

13te Regel.

Jede Wurzel eines Bruches iſt gleich der gleichnamigen Wurzel des Zählers dividirt durch die gleichnamige Wurzel des Nenners.

Nach dieſen vier letzten Regeln iſt alſo ferner

$$(a^2b^3)^2 = a^4b^6;$$

$$(a\sqrt{b})^2 = a^2b;$$

$$(a^2b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}})^3 = a^6bc^{\frac{3}{2}} = a^6b\sqrt[2]{c^3};$$

$$\sqrt[3]{a^6b^9} = a^2b^3;$$

$$\sqrt[2]{a^4b^8} = a^2b^4;$$

$$\sqrt[2]{a^4b^5} = a^2b^2\sqrt[2]{b};$$

$$\sqrt[n]{a^q} \times \sqrt[m]{b^p} = a^{\frac{q}{n}} \times b^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{qm}{mn}} \times b^{\frac{pn}{mn}}$$

$$= \sqrt[mn]{a^{qm}} \times \sqrt[mn]{b^{pn}} = \sqrt[mn]{a^{qm}b^{pn}};$$

$$\sqrt{a^n} : \sqrt[p]{b^m} = \frac{a^{\frac{n}{q}}}{b^{\frac{m}{p}}} = \frac{a^{\frac{np}{pq}}}{b^{\frac{mq}{pq}}} = \frac{\sqrt[pq]{a^{np}}}{\sqrt[pq]{b^{mq}}} = \sqrt[pq]{\frac{a^{np}}{b^{mq}}}.$$

159. Wenn was immer für ein zuſammengeſetzter Ausdruck $a + b$ zu einer Potenz zu erheben iſt; ſo giebt dieſer Ausdruck mit ſich ſelbſt multiplicirt die zwote Potenz; dieſe mit der 1ten multiplicirt die 3te Potenz; dieſe mit der 1ten multiplicirt die 4te Potenz; und die nte mit der 1ten multipliciret die $(n+1)$te Potenz derſelben. So iſt

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + 2ab + bb$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$ u. ſ. f.

Von Ausziehung der Quadratwurzel aus zuſammengeſetzten algebraiſchen Ausdrücken.

160.

Weil $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb = aa + (2a + b)b$; ſo iſt der 1te Theil der zuſammengeſetzten Wurzel $a = \sqrt{aa}$, und der 2te Theil ebenderſelben $b = \frac{2ab+bb}{2a+b}$.

Wenn daher aus einem zuſammengeſetzten Quadrate $aa + 2ab + bb$ die Wurzel auszuziehen iſt; ſo nehmen wir erſtlich die Wurzel a aus aa, und ziehen das Quadrat aa von $aa + 2ab + bb$ ab, damit uns der Reſt $2ab + bb$ bekannt werde: ſodann fangen wir dieſen Reſt $2ab + bb$ durch $2a$ zu theilen an, damit wir b den 2ten Theil der Wurzel $(a+b)$ und des Theilers $2a + b$ finden: endlich multipliciren wir den Theiler $2a + b$ durch b, und ziehen das Product $2ab + bb$ ab, damit 0 übrig bleibe, wenn $\sqrt{aa+2ab+bb} = a+b$ iſt.

Die-

Dieſes Verfahren wollen wir, wie folgt, vorſtellen,

$$\begin{array}{l} \sqrt{aa + 2ab + bb} = a + b \\ aa \\ \hline + 2ab + bb \ : \ 2a + b \\ + 2ab + bb \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

und uns dabey ſo ausdrücken: die Wurzel von aa iſt a. aa abgezogen läßt 2ab + bb zum Reſte; dieſer durch 2a dividirt giebt + b, den 2ten Theil der Wurzel a+b und des Theilers 2a + b, endlich läßt 2a + b mit b multipliciret und abgezogen nichts zum Reſte.

Ebenſo iſt

$$\begin{array}{l} \sqrt{aa + 6ab + 9bb} = a + 3b \\ aa \\ \hline 6ab + 9bb \ : \ 2a + 3b \\ 6ab + 9bb \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{4aa - 4ab + bb} = 2a - b \\ 4aa \\ \hline - 4ab + bb \ : \ 4a - b \\ - 4ab + bb \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{9xx + 24xy + 16yy} = 3x + 4y \\ 9xx \\ \hline + 24xy + 16yy \ : \ 6x + 4y \\ + 24xy + 16yy \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{25xx - 60x + 36} = 5x - 6$$

$$\begin{array}{l} 25xx \\ \hline \quad - 60x + 36 : 10x - 6 \\ \quad - 60x + 36 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{16xx - 8x + 1} = 4x - 1$$

$$\begin{array}{l} 16xx \\ \hline \quad - 8x + 1 : 8x - 1 \\ \quad - 8x + 1 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

161. Wenn von $aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$ die Wurzel auszuziehen iſt, und wir wie zuvor verfahren; ſo finden wir,

$$\sqrt{aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc} = a + b - c$$

$$\begin{array}{ll} & aa \\ \hline \text{1ter R.} & + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc : 2a + b \\ & + 2ab \quad\quad\quad\quad\quad\quad + bb \\ \hline \text{2ter Reſt} & \quad - 2ac - 2bc + cc : 2a + 2b - c \\ & \quad - 2ac - 2bc + cc \\ \hline & \quad\quad 0. \end{array}$$

Denn nachdem $a + b$ gefunden, und ſein Quadrat $aa + 2ab + bb$ ſchon abgezogen iſt; ſo kann man $a + b$ als den erſten Theil der Wurzel anſehen, den zweyten Reſt $- 2ac - 2bc + cc$ wieder durch das doppelte dieſes erſten Theiles $2a + 2b$ zu dividiren anfangen, und den dritten Theil der Wurzel $- c$ ebenſo wie zuvor den zweyten $+ b$ ausfindig machen.

Die-

Dieſemnach iſt ferner

$$\sqrt{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1} = a^2 + a + 1$$
$$a^4$$

1ter Reſt $\quad + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \ : \ 2a^2 + a$
$\quad 2a^3 + a^2$

2ter Reſt $\quad 2a^2 + 2a + 1 \quad : \ 2a^2 + 2a + 1$
$\quad 2a^2 + 2a + 1$

$\quad 0$

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4} = a^2 - 2ab - 2b^2$$
$$a^4$$

1ter Reſt $\quad - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \ : \ 2a^2 - 2ab$
$\quad - 4a^3b + 4a^2b^2$

2ter Reſt $\quad - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \ : \ 2a^2 - 4ab - 2b^2$
$\quad - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4$

$\quad 0.$

Von Ausziehung der Quadratwurzel
aus ungenannten und genannten Zahlen.

162.

Da

$1^2 = 1,$	$8^2 = 64,$
$2^2 = 4,$	$9^2 = 81,$
$3^2 = 9,$	$10^2 = 100,$
$4^2 = 16,$	$100^2 = 10000,$
$5^2 = 25,$	$1000^2 = 1000000,$
$6^2 = 36,$	$10000^2 = 100000000,$
$7^2 = 49,$	$100000^2 = 10000000000;$

ſo beſteht die Wurzel
aus einer Ziffer, da das Quadrat eine oder zwo,
aus zwoen Ziffern, da das Quadrat drey oder vier,
aus dreyen Ziffern, da das Quadrat fünf oder ſechs,
aus vier Ziffern, da das Quadrat ſieben oder acht und
aus n Ziffern, da das Quadrat 2n — 1 oder 2n
Ziffern hat.

Wird daher was immer für eine Quadratzahl 529, 15625, oder 2663282449 von der Einheit an in Klaſſen, jede von zwoen Ziffern eingetheilt; ſo beſteht die Wurzel derſelben aus ebenſovielen Ziffern, als die Zahl Klaſſen hat. So weil 5|29 zwo Klaſſen, 1|56|25 drey Klaſſen, 26|63|28|24|49 fünf Klaſſen hat; ſo beſteht $\sqrt{5|29}$ aus zwoen $\sqrt{1|56|25}$ aus dreyen, und $\sqrt{26|63|28|24|49}$ aus fünf Ziffern.

Es entſpricht nämlich einer höhern Klaſſe des Quadrates allemal wieder eine höhere Ziffer der Wurzel desſelben. Iſt alſo aus einer Zahl von zwoen Klaſſen die Wurzel auszuziehen, ſo können wir die Wurzel als einen zweytheiligen Ausdruck a + b anſehen, indem wir die Anzahl der Zehner = a und die Anzahl der Einheiten = b ſetzen, folglich die Wurzel einer ſolchen Zahl ebenſo, wie die Wurzel von dieſem Quadrate aa + 2ab + bb, finden.

Denn nehmen wir von dem Quadrate, welches der höhern Klaſſe am nächſten kömmt, die Wurzel; ſo haben wir die Anzahl der Zehner a: und ziehen wir das Quadrat dieſer Anzahl der Zehner aa von der höhern Klaſſe ab, und addiren zu dem Reſte noch die niedrigere Klaſſe; ſo erhalten wir den Reſt 2ab + bb, der durch das doppelte der Zehner 2a dividirt, b die Anzahl der Einheiten der Wurzel a + b, und des Theilers 2a + b giebt.

Dieſemnach findet man

$$\begin{array}{l} \sqrt{5|29} = 23 \\ \underline{4} \\ 129 : 43 \\ \underline{129} \\ 0. \end{array}$$

Denn nehmen wir aus dem Quadrate 4, das der höhern Klaſſe 5 am nächſten kömmt, die Wurzel; ſo haben wir die Anzahl der Zehner 2 der geſuchten Wurzel: und addiren wir zum Reſte von der höhern Klaſſe 100 die niedrigere Klaſſe 29; ſo erhalten wir 129, welches durch das doppelte von 2 Zehnern, durch 4 Zehner, oder 40 dividiret 3 für die Anzahl der Einheiten der Wurzel 23, und des Theilers 43 giebt. Ebenſo iſt

$$\begin{array}{l} \sqrt{75|69} = 87, \\ \underline{64} \\ 1169 : 167 \\ \underline{1169} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{51|84} = 72, \\ \underline{49} \\ 284 : 142 \\ \underline{284} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{16|81} = 41 \\ \underline{16} \\ 81 : 81 \\ \underline{81} \\ 0. \end{array}$$

163. Wenn die gegebene Zahl aus mehrern Klaſſen beſteht; ſo findet man nach ebendieſer Methode aus den zwo höchſten Klaſſen der gegebenen Zahl die zwo höchſten Ziffern der Wurzel: und ſieht man ſodann dieſe zwo gefundenen höchſten Ziffern der Wurzel als den erſten Theil derſelben a an, und theilet, weil ihr Quadrat ſchon abgezogen iſt, die Summe des Reſtes und der folgenden Klaſſe durch 2a; ſo giebt der Quotient b wieder die nächſtniedrigere Ziffer der Wurzel.

Und ſo kann ferner die 4te, die 5te, die 6te u. ſ. f. bis auf die niedrigſte Ziffer der Wurzel, ausfindig gemacht werden: wenn man die gefundenen Ziffern jedesmal wieder als a anſieht und die nächſtniedrigere b wie zuvor ſuchet.

So findet man

$\sqrt{1|56|25} = 125$.

1
56 : 22
44
1225 : 245
1225
0

$\sqrt{55|95|04} = 748$

49
695 : 144
576
11904 : 1488
11904
0

$\sqrt{5|48|49|64} = 2342$.

4
148 : 43
129
1949 : 464
1856
9364 : 4682
9364
0

$\sqrt{74|04|60|25} = 8605$

64
1004 : 166
996
860 : 1720
0
86025 : 17205
86025
0

$\sqrt{26|63|28|24|49} = 51607$

25
163 : 101
101
6228 : 1026
6156
7224 : 10320
0
722449 : 103207
722449
0.

164. Weil jede Klaſſe zu dem Reſte der höhern addiret nach dieſem Verfahren allemal wieder eine niedrigere Ziffer für die Wurzel giebt; ſo iſt bey Zahlen, die aus ganzen und zehntheiligen Ziffern beſtehen, gar nichts beſonders zu beobachten, als daß man die Klaſſen von der Einheit an auch zur Rechten fortſetze, und wie bey ganzen Zahlen zu Werke gehe.

Dieſemnach findet man

$\sqrt{26|63.28|24|49} = 51.607$

25
163 : 101
101
6228 : 1026
6156
7224 : 10320
0
722449 : 103207
722449
0

√ 11|94.39|36 = 34.56
9
294 : 64
256
3839 : 685
3425
41436 : 6906
41436
0

√ 3.58|72|36 = 1.894
1
258 : 28
224
3472 : 369
3321
15136 : 3784
15136
0

√ 0.06|15|98|27|61 = 0.24819
4
215 : 44
176
3998 : 488
3904
9427 : 4961
4961
446661 : 49629
446661
0

165. Weil man nach dem Zeichen der Einheit ſoviel Nullen, als man immer will, ſetzen kann; ſo kann man, wenn bey Ausziehung der Wurzel aus ganzen Zahlen noch ein Reſt bleibt, dieſem Reſte zwo Nullen, den ſchon gefundenen Einheiten der Wurzel aber einen Punct nachſchreiben und die Rechnung, ſo weit man will, fortſetzen.

So weil $3 = 3.00|00|00|00|00|00|00$: u. ſ. f.;

ſo wird $\sqrt{3} = 1.7320508$ ꝛc.

1
200 : 27
189
1100 : 343
1029
7100 : 3462
6924
17600 : 34640
0
1760000 : 346405
1732025
2797500 : 3464100
0
279750000 : 34641008
277128064
2621936

Dieſe Zahl 1. 7320508 iſt zwar noch kleiner als $\sqrt{3}$; allein der Unterſcheid beträgt ſchon weniger als $\frac{1}{10000000}$, und wird immer noch weniger betragen, je weiter die Rechnung fortgeſetzet wird.

Man

Man kann alſo dem Werthe einer ſolchen Wurzel durch dieſe Rechnungsart ſo nahe, als man immer will, kommen.

Wenn im Rechnen kein Fehler begangen worden iſt; ſo muß das Quadrat der gefundenen Wurzel, mehr der Reſt, der vorgelegten Zahl gleich werden.

In dieſem Beyſpiele iſt

$$\begin{array}{rl} 1{,}7320508^2 = & 2.9999999\ 7378064 \\ \text{der Reſt} = & 2621936 \\ \hline \text{alſo die Summe} = & 3.0000000\ 0000000. \end{array}$$

Ebenſo findet man

$$\sqrt{18|64} = 43.\ 17406 \text{ ꝛc.}$$

```
√18|64 = 43. 17406 ꝛc.
 16
 ——
  264 : 83
  249
  ———
   1500 : 861
    861
    ———
    63900 : 8627
    60389
    —————
     351100 : 86344
     345376
     ——————
      572400 : 863480
           0
      ——————
      57240000 : 8634806
      51808836
      ————————
       5431164
```

$$\begin{array}{rl} \text{Denn es iſt } 43.17406^2 = & 1863.999\ 4568836 \\ \text{der Reſt} = & 5431164 \\ \hline \text{alſo die Summe} = & 1864.000\text{-}0000000 \end{array}$$

166.

166. Weil die Wurzel von einem Bruche gleich iſt der Wurzel des Zählers dividirt durch die Wurzel des Nenners; ſo iſt ferner

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{1.7320508 \text{ ꝛc.}}{2} = 0.8660254 \text{ ꝛc. oder}$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0.75} = 0.8660254 \text{ ꝛc.}$$

```
64
――――
1100 : 166
 996
――――――
 10400 : 1726
 10356
――――――
     4400 : 17320
        0
――――――
     440000 : 173202
     346404
――――――
      9359600 : 1732045
      8660225
――――――
       69937500 : 17320504
       69282016
――――――
         655484.
```

Wenn von einer, aus einer ganzen und einer gebrochenen, zuſammengeſetzten Zahl die Wurzel auszuziehen iſt; ſo kann man die Ganzen und den Bruch unter einen gemeinen Nenner bringen, oder den Bruch in Zehntheilchen auflöſen; und wie zuvor verfahren.

So wird

$$\sqrt{74\tfrac{14}{25}} = \sqrt{\tfrac{1864}{25}} = \frac{43.17406 \text{ ꝛc.}}{5} = 8.63481 \text{ ꝛc.}$$

oder

oder

$$\sqrt{74\tfrac{14}{25}} = \sqrt{74.56} = 8.63481 \text{ etc.}$$

```
74.56
64
---
1056 : 166
 996
---
 6000 : 1723
 5169
 ----
  83100 : 17264
  69056
  -----
  1404400 : 172688
  1381504
  -------
   2289600 : 1726961
   1726961
   -------
    562639.
```

167. Man erhält das Quadrat einer genannten Zahl, wenn man die Zahl ſo oft nimmt, als ſie ſelbſt Einheiten hat.

So iſt $(7^{\circ})^2 = 49^{\circ}$;
$(2^{\circ}\ 3^{I}\ 6^{II})^2 = (2^{\circ}\ 3^{I}\ 6^{II}) \times (2^{\circ}\ 3^{I}\ 6^{II})$
$= 6^{\circ}\ 4^{I}\ 0^{II}\ 6^{III}$; und
$(0^{\circ}\ 5^{I}\ 3^{II})^2 = (0^{\circ}\ 5^{I}\ 3^{II}) \times (0^{\circ}\ 5^{I}\ 3^{II})$
$= 0^{\circ}\ 4^{I}\ 7^{II}\ 1^{III}\ 6^{IIII}$.

Iſt nun aus einer genannten Zahl die Wurzel auszuziehen; ſo kann man

1tens die Theile der Einheit von den niedrigſten angefangen durch ihre Nenner dividiren, und ſo in einen Bruch, der mit den Ganzen gleichnamig iſt, verwandeln,

2tens dieſen Bruch in Zehntheilchen auflöſen, ſodann

3tens die Wurzel nach bekanuter Methode ausziehen, und endlich

4tens noch die Zehntheilchen der Wurzel durch die Nenner der Theile von den höchſten angefangen multipliciren

und

und ſo wieder in jene Theile der Einheit verwandeln, welche mit den Theilen des gegebenen Quadrates gleichnamig ſind. So wird

$$\sqrt{6^\circ\ 4^{I}\ 0^{II}\ 6^{III}} = \sqrt{6^\circ\ 4^{I}\ \tfrac{1}{2}^{II}} = \sqrt{6^\circ\ \tfrac{97}{24}^{I}} = \sqrt{6\tfrac{97}{144}^{\circ}}$$

$$= \sqrt{6^\circ + 97^\circ : 144} = \sqrt{6^\circ.67|36|11\text{ꝛc.}} = 2^\circ.58333\text{ꝛc.}$$

970	4
864	267 : 45
1060	225
1008	4236 : 508
520	4064
432	17211 : 5163
880	15489
864	172211 : 51663
160	154989
144	1722211 : 516663
160	1549989
144	172222
16	

allein es iſt $2^\circ.\ 58333$ ꝛc.

$= 2^\circ\ 3^{I}.\ 49999$ ꝛc.
$= 2^\circ\ 3^{I}\ 5^{II}.\ 99999$ ꝛc.
$= 2^\circ\ 3^{I}\ 5^{II}\ 11^{III}.\ 99999$ ꝛc.
$= 2^\circ\ 3^{I}\ 5^{II}\ 11^{III}\ 11^{IIII}.\ 99999$ ꝛc.
$= 2^\circ\ 3^{I}\ 6^{II}.$

alſo $\sqrt{6^\circ\ 4^{I}\ 0^{II}\ 6^{III}} = 2^\circ\ 3^{I}\ 6^{II}.$

$$\sqrt{0^\circ\ 4^{I}\ 7^{II}\ 1^{III}\ 6^{IIII}} = \sqrt{0^\circ\ 4^{I}\ 7^{II}\ \tfrac{3}{2}^{III}} = \sqrt{0^\circ\ 4^{I}\ \tfrac{171}{24}^{II}}$$

$$= \sqrt{0^\circ\ \tfrac{1323}{288}^{I}}$$

=

$= \sqrt{1323^{\circ} : 1728} = \sqrt{0^{\circ}.76|56|25} = 0^{\circ}.875$

13230	64
12096	1256 : 167
11340	1169
10368	8725 : 1745
9720	8725
8640	0
10800	
10368	
4320	
3456	
8640	
8640	
0	

$= 0^{\circ}.\ 5^{I}.\ 25 = 0^{\circ}\ 5^{I}\ 3^{II}.$

$\sqrt{7^{\circ}} = 2^{\circ}.\ 64575$ ꝛc. $= 2^{\circ}.\ 3^{I}.\ 8745$ ꝛc.

4
300 : 46
276
2400 : 524
2096
30400 : 5285
26425
397500 : 52907
370349
2715100 : 529145
2645725
69375

= 2°

$= 2^{\circ}\ 3^{I}\ 10^{II}.\ 494$ ꝛc. $= 2^{\circ}\ 3^{I}\ 10^{II}\ 5^{III}.\ 928$ ꝛc.
$= 2^{\circ}\ 3^{I}\ 10^{II}\ 5^{III}\ 11^{IIII}.\ 136$ ꝛc.

Viel leichter werden wir die Wurzel einer genannten Zahl erhalten, wenn wir, ſo wie bey algebraiſchen Ausdrücken oder ungenannten Zahlen verfahren, die Ganzen als den erſten Theil des zuſammengeſetzten Ausdruckes, die höchſten Theile der Einheit als den zweyten, die nächſtfolgenden als den dritten anſehen u. ſ. f.

Dieſemnach findet man

$\sqrt{6^{\circ}}$	4^{I}	0^{II}	6^{III}	$= 2^{\circ}\ 3^{I}\ 6^{II}$
4				
2	4	0	6	$: 4^{\circ}\ 3^{I}$
2	1	6	0	$= 4^{\circ}\ 3^{I} \times 3^{I}$
0	2	6	6	$: 5^{\circ}\ 0^{I}\ 6^{II}$
0	2	6	6	$= 5^{\circ}\ 0^{I}\ 6^{II} \times 6^{II}$
		0		

$\sqrt{18\vert 87^{\circ}}$	2^{I}	6^{II}	2^{III}	8^{IIII}	$= 43^{\circ}\ 2^{I}\ 8^{II}$
16					
2 87	2	6	2	8	$: 83^{\circ}$
2 49					
38	2	6	2	8	$: 86^{\circ}\ 2^{I}$
28	4	8	0	0	$= 86^{\circ}\ 2^{I} \times 2^{I}$
9	3	10	2	8	$: 86^{\circ}\ 4^{I}\ 8^{II}$
9	3	10	2	8	$= 86^{\circ}\ 4^{I}\ 8^{II} \times 8^{II}$
		0			

Wenn das gegebene Quadrat keine Ganzen enthält, wie $0^{\circ}\ 4^{I}\ 7^{II}\ 1^{III}\ 6^{IIII}$; ſo multipliciren wir daſſelbe erſtlich durch eine Quadratzahl 4, 9 oder 16, ſuchen ſodann die Wurzel von dem gefundenen Producte, und dividiren ſolche wieder durch die Wurzel 2, 3 oder 4

jener Quadratzahl 4, 9 oder 16. Denn es iſt allgemein $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

Dieſemnach wird

$$\sqrt{0^\circ\,4^{I}\,7^{II}\,1^{III}\,6^{IIII}} = \frac{\sqrt{0^\circ\,4^{I}\,7^{II}\,1^{III}\,6^{IIII}\times 4}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3^\circ\,0^{I}\,4^{II}\,6^{III}}}{2} = \frac{1^\circ\,4^{I}\,6^{II}}{2} = 0^\circ\,5^{I}\,3^{II}.$$

$$\begin{array}{cccccl} 1 & & & & & \\ \hline 2 & 0 & 4 & 6 & : & 2^\circ\,4^{I} \\ 1 & 4 & 8 & 0 & = & 2^\circ\,4^{I}\times 4^{I} \\ \hline 0 & 1 & 8 & 6 & : & 3^\circ\,2^{I}\,6^{II} \\ 0 & 1 & 8 & 6 & = & 3^\circ\,2^{I}\,6^{II}\times 6^{II} \\ \hline & & 0 & & & \end{array}$$

$$\sqrt{0^\circ\,1^{I}\,1^{II}\,4^{III}\,2^{IIII}} = \frac{\sqrt{0^\circ\,1^{I}\,1^{II}\,4^{III}\,2^{IIII}\times 9}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{1^\circ\,4^{I}\,0^{II}\,1^{III}\,6^{IIII}}}{3} = \frac{1^\circ\,1^{I}\,9^{II}}{3} = 0^\circ\,2^{I}\,7^{II}$$

$$\begin{array}{ccccccl} 1 & & & & & & \\ \hline 0 & 4 & 0 & 1 & 6 & : & 2^\circ\,1^{I} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & = & 2^\circ\,1^{I}\times 1^{I} \\ \hline 0 & 1 & 10 & 1 & 6 & : & 2^\circ\,2^{I}\,9^{II} \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 6 & = & 2^\circ\,2^{I}\,9^{II}\times 9^{II} \\ \hline & & 0 & & & & \end{array}$$

Endlich iſt noch

$$\sqrt{7^{0}\ 0^{\mathrm{I}}\ 0^{\mathrm{II}}\ 0^{\mathrm{III}}\ 0^{\mathrm{IIII}}} = 2^{0}\ 3^{\mathrm{I}}\ 10^{\mathrm{II}}\ 5^{\mathrm{III}}\ 11^{\mathrm{IIII}}.\ \text{ꝛc.}$$

4							
3	0	0	0	0			$: 4^{0}\ 3^{\mathrm{I}}$
2	1	6	0	0			$= 4^{0}\ 3^{\mathrm{I}} \times 3^{\mathrm{I}}$
0	4	6	0	0			$: 5^{0}\ 0^{\mathrm{I}}\ 10^{\mathrm{II}}$
0	4	3	4	8			$= 5^{0}\ 0^{\mathrm{I}}\ 10^{\mathrm{II}} \times 10^{\mathrm{II}}$
0	0	2	7	4			$: 5^{0}\ 1^{\mathrm{I}}\ 8^{\mathrm{II}}\ 5^{\mathrm{III}}$
0	0	2	2	5	0^{IIIII}	2^{IIIIII}	$= 5^{0}\ 1^{\mathrm{I}}\ 8^{\mathrm{II}}\ 5^{\mathrm{III}} \times 5^{\mathrm{III}}$
0	0	0	4	10	11	10	$: 5^{0}\ 1^{\mathrm{I}}\ 8^{\mathrm{II}}\ 10^{\mathrm{III}}$

168. Die Gleichungen, welche wir bisher aufgelöſet haben, enthielten immer nur die erſte Potenz der Unbekannten. Sie werden deswegen Gleichungen des 1ten Grades genennt, ſo wie die andern Gleichungen des 2ten, 3ten, 4ten oder 5ten Grades heißen, nachdem die höchſte Potenz der Unbekannten, welche darinn vorkömmt, die 2te, 3te, 4te oder 5te iſt, u. ſ. f.

Von den beſtimmten Gleichungen des zweyten Grades.

Es ſind jene Gleichungen, worinn die 2te Potenz der Unbekannten ohne die 3te oder eine höhere Potenz derſelben vorkömmt.

Sie heißen auch **quadratiſche Gleichungen**, und ſind alle in dieſer Formel

$$xx + px = q$$

begriffen. Denn es können darinn nie mehr, als dreyerley Ausdrücke vorkommen: ſolche, welche die 2te Potenz der Unbekannten, welche die 1te Potenz der Unbekannten,

und welche lauter bekannte Größen enthalten. Uebrigens kann bey einer ſolchen Gleichung das Quadrat der Unbekannten ebenſo, wie bey einer Gleichung des 1ten Grades die 1te Potenz der Unbekannten allemal von ihrem Coefficienten befreyet werden.

169. Es ſey p = 0; ſo wird die allgemeine Gleichung

$$xx + px = q$$

in dieſe verwandelt

$$xx = q$$

welche alle quadratiſchen Gleichungen in ſich begreift, worinn die erſte Potenz der Unbekannten nicht vorkömmt. Man nennet ſie **reine quadratiſche Gleichungen**, und jene, welche nebſt der 2ten auch die 1te Potenz der Unbekannten enthalten, **vermiſchte quadratiſche Gleichungen.**

Iſt $xx = q$; ſo bedeutet xx ebendasjenige, was q bedeutet; alſo werden auch die Wurzeln von xx und von q einerley bedeuten.

Iſt folglich $xx = q$; ſo iſt auch

$$x = \pm \sqrt{q}$$

Man muß allemal + und — ſetzen, weil jedes Quadrat, wie wir oben geſehen haben, eine bejahende und eine verneinende Wurzel hat.

Iſt nun q eine bejahende Rationalzahl; ſo wird der Werth von x genau gefunden, wenn man von der bekannten Zahl die Wurzel wirklich auszieht: iſt aber q eine bejahende Irrationalzahl; ſo kann auch der Werth von x nicht anders, als durch Näherung beſtimmt werden: und iſt endlich q verneinend; ſo iſt der Werth von x unmöglich, ein ſicherer Beweiß, daß die Aufgabe, welche auf dieſe Gleichung geführet hat, ſich ſelbſt widerſpricht.

Es

Es wird alſo eine reine quadratiſche Gleichung aufgelöſet, wenn man xx vom Coefficienten befreyt, allein auf eine Seite des Gleichungszeichens bringt, und ſodann von beyden Gliedern noch die Wurzel auszieht.

Es ſey $3xx + \frac{xx}{2} - 5 = 82\frac{1}{2}$; ſo iſt

$$6xx + xx - 10 = 165$$
$$6xx + xx = 175$$
$$7xx = 175$$
$$xx = 25$$
$$x = \pm \sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Denn iſt $x = + 5$ oder $- 5$; ſo iſt xx allemal $+ 25$,

alſo $3xx + \frac{xx}{2} - 5 = 75 + 12\frac{1}{2} - 5 = 82\frac{1}{2}$

Es ſey $\frac{xx}{a} - c = - bxx$; ſo iſt

$$xx - ac = - abxx$$
$$abxx + xx = ac$$
$$(ab + 1)\, xx = ac$$
$$xx = \frac{ac}{ab+1}$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{ac}{ab+1}}$$

Es ſey $11xx - 9 = 14xx - 30$; ſo iſt

$$14xx - 11xx = 30 - 9$$
$$3xx = 21$$
$$xx = 7$$
$$x = \pm \sqrt{7} = \pm 2.64575 \text{ ꝛc.}$$

Es ſey $3xx + 122 = 42 - 2xx$; ſo iſt

$$3xx + 2xx = 42 - 122$$
$$5xx = -80$$
$$xx = -16$$
$$x = \pm\sqrt{-16}$$

Weil $\sqrt{-16}$ unmöglich iſt; ſo wird was immer für eine Aufgabe, die auf dieſe Gleichung führet, allemal einen Widerſpruch in ſich enthalten.

Beſtimmte Aufgaben, die auf reine quadratiſche Gleichungen leiten.

170.

Suche eine Zahl, deren $\frac{1}{4}$ mit ihrem $\frac{1}{5}$ multiplicirt 80 ausmache.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt $\frac{x}{4} \times \frac{x}{5} = 80$

$$\frac{xx}{20} = 80$$
$$xx = 1600$$
$$x = \pm\sqrt{1600}$$
$$x = \pm 40$$

Denn $\frac{40}{4} \times \frac{40}{5} = 10 \times 8 = 80$ und

$$-\frac{40}{4} \times -\frac{40}{5} = -10 \times -8 = 80$$

Suche eine Zahl, die ſo beſchaffen iſt, daß, wenn man 10 dazu addirt, ſodann 10 davon abzieht, jene Summe mit dieſem Unterſcheide multiplicirt 2400 gebe.

Die-

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt

$$(x+10)(x-10) = 2400$$
$$xx + 10x - 10x - 100 = 2400$$
$$xx = 2400 + 100$$
$$xx = 2500$$
$$x = \pm \sqrt{2500}$$
$$x = \pm 50$$

Man ſoll eine Zahl ſuchen, welche ſo beſchaffen iſt, daß, wenn man ſie zu 11 addirt, ſodann von 11 abzieht, jene Summe mit dieſem Unterſcheide multiplicirt 72 ausmache.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt

$$(11+x)(11-x) = 72$$
$$121 + 11x - 11x - xx = 72$$
$$-xx = 72 - 121$$
$$xx = 121 - 72$$
$$xx = 49$$
$$x = \pm \sqrt{49}$$
$$x = \pm 7$$

Ich habe für 96 fl. Tuch gekauft. Wenn ich die Anzahl der Ellen mit $\frac{2}{3}$ multiplicire; ſo habe ich die Anzahl der Gulden, die jede Elle gekoſtet hat. Wieviel ſind es Ellen, und wie hoch kam jede zu ſtehen?

Es ſeyen x Ellen; ſo hat jede Elle $\frac{96}{x}$ fl. gekoſtet.

Daher iſt $\frac{2x}{3} = \frac{96}{x}$

$$2x = \frac{288}{x}$$
$$2xx = 288$$
$$xx = 144$$
$$x = \pm \sqrt{144}$$
$$x = 12.$$

Weil man nur bejahende Ellen kauft; ſo läßt dieſe Aufgabe für x keinen verneinenden Werth zu.

Zween haben eine gewiſſe Anzahl Gulden: ſo oft der 1te 7 fl. hat; ſo hat der 2te 11 Gulden: und multipliciret man die Hälfte der Anzahl der Gulden des 1ten mit dem Viertel der Anzahl der Gulden des zweyten; ſo kömmt 616 zum Vorſchein. Wieviel hat jeder Gulden?

Der 1te habe x Gulden; ſo hat er $\frac{x}{7}$mal 7 fl., alſo der andere $\frac{x}{7}$mal 11 oder $\frac{11x}{7}$fl. Daher iſt

$$\frac{11x}{4\times 7}\times\frac{x}{2}=616$$

$$\frac{11xx}{4\times 7\times 2}=616$$

$$\frac{11xx}{7}=4928$$

$$11xx=34496$$

$$xx=\frac{34496}{11}=3136$$

$$x=\pm\sqrt{3136}$$

$$x=56 \text{ und}$$

$$\frac{11x}{7}=88.$$

Drey kaufen, jeder gleichviel Stücke Vieh: der 1te kauft Schaafe, jedes um 5 fl., der 2te Rinder, jedes um 30 fl., und der 3te Pferde, jedes um 90 fl. Nun wird die Ausgabe des 1ten mit der Ausgabe des 2ten, und die Ausgabe des 2ten mit jener des 3ten multiplicirt; ſo giebt die Summe dieſer Producte 481650. Wieviel hat jeder Stücke?

Der

Der 1te habe x Schaafe; ſo hat der 2te x Rinder und der 3te x Pferde. Nun iſt die Ausgabe des 1ten 5x, des 2ten 30x, und des 3ten 90x fl; folglich iſt

$$5x \times 30x + 30x \times 90x = 481650$$
$$150xx + 2700xx = 481650$$
$$2850xx = 481650$$
$$xx = \frac{481650}{2850} = 169$$
$$x = \pm\sqrt{169}$$
$$x = 13$$

Mehrere Kaufleute tretten in eine Geſellſchaft, jeder legt 100mal ſoviel Gulden ein, als der Geſellen ſind, und gewinnt mit jedem 100 fl. 3mal ſoviel Gulden, als der Geſellen ſind. Nun theilet man den gemeinſchäftlichen Gewinn durch 192; ſo kömmt die Anzahl der Geſellen heraus. Wieviel ſind es Geſellen?

x Geſellen. Folglich hat jeder 100x eingelegt, alſo alle insgeſammt 100x fl. xmal genommen, oder 100xx fl. Mit 100 fl. gewinnen ſie 3x fl., alſo mit jedem Gulden $\frac{3x}{100}$ fl., folglich mit 100xx fl. 100xxmal $\frac{3x}{100}$ fl. oder $\frac{300x^3}{100}$ fl. oder $3x^3$ fl.; daher iſt

$$\frac{3x^3}{192} = x$$
$$3x^3 = 192x$$
$$3xx = 192$$
$$xx = 64$$
$$x = \pm\sqrt{64}$$
$$x = 8$$

171. Wenn dieſe allgemeine vermiſchte quadratiſche Gleichung

$$xx + px = q$$

aufzulöſen iſt, und wir von beyden Gliedern, wie bey der Auflöſung einer reinen quadratiſchen Gleichung, die

Wurzel ausziehen wollen; ſo kömmt in Anſehung des unbekannten Gliedes $xx + px$ die Rechnung, wie folgt, zu ſtehen: $\sqrt{xx + px} = x + \frac{p}{2}$

$$xx$$

1ter Reſt. $+ px \quad : 2x + \frac{p}{2}$

$$px + \frac{pp}{4}$$

2ter Reſt. $- \frac{pp}{4}$

Folglich läßt ſich die Wurzel von dieſem Gliede $xx + px$ nicht vollkommen angeben, indem immer noch ein Reſt $- \frac{pp}{4}$ bleibt, der aber nicht mehr bleiben würde, wenn dieſes Glied um $\frac{pp}{4}$ größer wäre. Addiren wir daher $\frac{pp}{4}$ zu beyden Gliedern, und ziehen ſodann erſt beederſeits die Wurzel aus; ſo werden wir allemal, wie folgt, zur Auflöſung einer ſolchen Gleichung gelangen.

Denn wenn $xx + px = q$; ſo iſt auch

$$xx + px + \frac{pp}{4} = \frac{pp}{4} + q, \text{ und}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4} + q}; \text{ alſo}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$$

Nachdem nun $\frac{pp}{4} + q$ eine bejahende Rationalzahl, eine bejahende Irrationalzahl, oder eine verneinende Zahl iſt: ſo wird der Werth von x genau oder durch Näherung gefunden, oder unmöglich ſeyn.

Weil

Weil p jeden Coefficienten von x, $\frac{p}{2}$ deſſen Hälfte und $\frac{pp}{4}$ das Quadrat von dieſer Hälfte bedeutet; ſo wird man zur Auflöſung einer jeden vermiſchten quadratiſchen Gleichung gelangen, wenn man xx vom Coefficienten befreyet, das Quadrat des halben Coefficienten von x beederſeits addiret, und endlich von beyden Gliedern die Wurzel auszieht.

Es ſey $3xx - 273 = -18x$; ſo iſt
$$3xx + 18x = 273$$
$$xx + 6x = 91,$$ alſo weil
$$p = 6,\ \frac{p}{2} = 3,\ \text{und}\ \frac{pp}{4} = 9,$$
$$xx + 6x + 9 = 100$$
$$x + 3 = \pm 10$$
$$x = -3 \pm 10$$
$$x = 7,\ \text{und}$$
$$x = -13$$

Es ſey $5xx - 594 = x$; ſo iſt
$$5xx - x = 594$$
$$xx - \frac{x}{5} = \frac{594}{5},$$ alſo weil
$$p = -\frac{1}{5},\ \frac{p}{2} = -\frac{1}{10}\ \text{und}\ \frac{pp}{4} = +\frac{1}{100},$$
$$xx - \frac{x}{5} + \frac{1}{100} = \frac{1}{100} + \frac{594}{5}$$
$$x - \frac{1}{10} = \pm\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{594}{5}}$$
$$x = \frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{594}{5}}$$

$$x = \frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{11880}{100}}$$

$$x = \frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{11881}{100}}$$

$$x = \frac{1}{10} \pm \frac{109}{10}$$

$$x = \frac{1}{10} + \frac{109}{10} = \frac{110}{10} = 11 \text{ und}$$

$$x = \frac{1}{10} - \frac{109}{10} = -\frac{108}{10} = -10.8$$

Es ſey $300 + 2x = 2xx - 12$; ſo iſt

$$2xx - 2x = 300 + 12$$

$$2xx - 2x = 312$$

$$xx - x = 156, \text{ alſo weil}$$

$$p = -1, \frac{p}{2} = -\frac{1}{2} \text{ und } \frac{pp}{4} = +\frac{1}{4}$$

$$xx - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 156$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} + 156}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 156}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{25}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{25}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ und}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{25}{2} = -\frac{24}{2} = -12$$

172. Damit das erſte Glied dieſer Gleichung

$$xx + px = q$$

ein vollkommenes Quadrat werde, iſt beederſeits, wie wir geſehen haben, $\frac{pp}{4}$ zu addiren. Dieſes läßt ſich auch daraus erkennen, daß jedes Quadrat eines zweytheiligen Ausdruckes aus drey Theilen beſteht: aus dem Quadrat des erſten Theils der Wurzel, aus dem doppelten Producte beeder Theilen, und aus dem Quadrate des letzten Theiles ebenderſelben.

Nun iſt xx das Quadrat des erſten Theiles und px das doppelte Product beeder Theile, alſo $\frac{px}{2}$ das Product derſelben, x der 1te und $\frac{p}{2}$ der 2te Theil der Wurzel, alſo $\frac{pp}{4}$ das Quadrat des zweyten Theiles, um welches das erſte Glied der Gleichung kleiner iſt, als das Quadrat $xx + px + \frac{pp}{4}$ von der zweytheiligen Wurzel $x + \frac{p}{2}$.

Es ſey $7 - xx = 7\frac{2}{9} - x$; ſo iſt

$$xx - x = -\frac{2}{9}$$

Wenn alſo $xx - x$ ein vollkommenes Quadrat werden ſoll; ſo iſt xx das Quadrat des erſten Theils, $-\frac{x}{2}$ das Product beeder Theile, x der erſte, und $-\frac{1}{2}$ der zweyte Theil; alſo giebt das Quadrat des zweyten Theils $\frac{1}{4}$ beederſeits addirt,

xx

$$xx - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{36} - \frac{8}{36}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

und

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Es ſey $\frac{xx}{12} + \frac{x}{4} = 22\frac{1}{2}$; ſo iſt

$$xx + 3x = 270$$

Wenn alſo $xx + 3x$ ein vollkommenes Quadrat werden ſoll; ſo iſt $\frac{3x}{2}$ das Product beeder Theilen, x der erſte, und $\frac{3}{2}$ der zweyte Theil der Wurzel; folglich giebt das Quadrat dieſes zweyten Theiles $\frac{9}{4}$, beederſeits addirt, $xx + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + 270$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} + 270}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 270}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1089}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{33}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} + \frac{33}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ und}$$

$$x = -\frac{3}{2} - \frac{33}{2} = -\frac{36}{2} = -18$$

173. Bringen wir in dieſer allgemeinen Gleichung

$$xx + px = q$$

den Ausdruck px auf die andere Seite des Gleichungszeichens; ſo wird $xx = -px + q$,
woraus ſich die Aufloͤſung

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$$

gar leicht ſchlieſſen laͤßt.

Denn x iſt allemal gleich dem halben Coefficienten von x mehr und weniger der Wurzel aus der Summe des Quadrates dieſes halben Coefficienten, und des bekannten Ausdruckes.

Weil dieſe Regel die Rechnung ſehr abkuͤrzet; ſo werden wir bey jeder Gelegenheit Gebrauch davon machen.

174. Es ſey endlich in der allgemeinen Gleichung

$$xx + px = q$$

noch $q = 0$; ſo wird ſolche in dieſe

$$xx + px = 0$$

verwandelt, die wie eine Gleichung vom erſten Grade kann aufgeloͤſet werden. Denn dividiren wir beyde Glieder durch x; ſo wird

$$x + p = 0, \text{ alſo}$$

$$x = -p.$$

Nichts-

Nichtsdeſtoweniger bleibt die Gleichung immer noch eine Gleichung vom zweyten Grade, und die itzt gegebene Auflöſung derſelben unvollſtändig, weil ſie nicht alle Werthe, die x vermöge dieſer Gleichung haben kann, zu erkennen giebt. Denn weil

$$xx + px = 0; \text{ ſo iſt}$$
$$xx = - px + 0, \text{ folglich}$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + 0}$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}$$
$$x = 0, \text{ und}$$
$$x = - p.$$

Beſtimmte Aufgaben, die auf vermiſchte quadratiſche Gleichungen führen.

175.

Suche zwey Zahlen, deren Unterſcheid 13, und deren Product 198 ausmache.

Die kleinere ſey x; ſo iſt die gröſſere x + 13, alſo

$$xx + 13x = 198$$
$$xx = - 13x + 198$$
$$x = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} + 198}$$
$$x = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{961}{4}}$$
$$x = -\frac{13}{2} \pm \frac{31}{2}$$
$$x = 9, \text{ und } x + 13 = 22 \text{ oder}$$
$$x = -22. \text{ und } x + 13 = -9.$$

Suche

Suche eine Zahl, deren Quadrat ebenſoviel über 319, als die Zahl ſelbſt unter 61 iſt.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt xx um xx — 319 über 319, und x um 61 — x unter 61; alſo

$$xx - 319 = 61 - x$$
$$xx = - x + 380$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 380}$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1521}{4}}$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{39}{2}$$
$$x = -20, \text{ oder}$$
$$x = 19$$

Suche eine Zahl, deren Quadrat ebenſoviel unter 7, als die Zahl ſelbſt unter $7\frac{2}{9}$ iſt.

Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt xx um 7 — xx unter 7, und x um $7\frac{2}{9}$ — x unter $7\frac{2}{9}$; alſo

$$7 - xx = 7\frac{2}{9} - x$$
$$63 - 9xx = 65 - 9x$$
$$9xx = 9x - 2$$
$$xx = x - \frac{2}{9}$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}}$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{36}}$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Suche eine Zahl, die ſo beſchaffen iſt, daß das Product aus ihrem $\frac{1}{4}$ und ihrem $\frac{1}{3}$ zu ihrem $\frac{1}{4}$ addirt, $22\frac{1}{2}$ gebe. Dieſe Zahl ſey x; ſo iſt

$$\frac{x}{4} \times \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 22\frac{1}{2}$$

$$\frac{xx}{12} + \frac{x}{4} = 22\frac{1}{2}$$

$$\frac{xx}{3} + x = 90$$

$$xx + 3x = 270$$

$$xx = -3x + 270$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 270}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1089}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{33}{2}$$

$$x = 15, \text{ oder}$$

$$x = -18$$

Suche zwo Zahlen, eine noch ſo groß als die andere, daß, wenn man zu ihrem Producte ihre Summe addirt, 104 herauskomme. Die kleinere ſey x; ſo iſt die gröſſere 2x, alſo $2xx + 3x = 104$

$$2xx = -3x + 104$$

$$xx = -\frac{3x}{2} + 52$$

x

$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 52}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{841}{16}}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{29}{4}$$

$x = 6\frac{1}{2}$, und $2x = 13$, oder

$x = -8$ und $2x = -16$.

Einer hat ein Haus gekauft; verkauft es wieder um 21836 fl., und gewinnt an jedem 100 fl. den 100ſten Theil von dem, was ihn das Haus gekoſtet hat: wie theuer hatte er daſſelbe eingekauft?

Um x fl. Alſo hat er mit 100 fl. $\frac{x}{100}$, mit jedem Gulden $\frac{x}{10000}$, und mit x fl. $\frac{xx}{10000}$ fl. gewonnen.

Daher iſt $x + \frac{xx}{10000} = 21836$

$$10000x + xx = 218360000$$

$$xx = -10000x + 218360000$$

$$x = -5000 \pm \sqrt{25000000 + 218360000}$$

$$x = -5000 \pm \sqrt{243360000}$$

$$x = -5000 \pm 15600$$

$$x = 10600$$

Einer kaufte um 1008 fl. Pferde: hätte er für ebendas Geld zwey Stücke mehr bekommen; ſo wäre das Stück um 12 fl. wohlfeiler geweſen. Wieviel Pferde waren es?

x Pferde. Daher hat das Stück $\frac{1008}{x}$ fl. gekoſtet; wären es aber $(x+2)$ Pferde geweſen; ſo hätte ein jedes $\frac{1008}{x+2}$ fl. gekoſtet.

Daher iſt $\frac{1008}{x} = \frac{1008}{x+2} + 12$

$$1008 = \frac{1008x}{x+2} + 12x$$

$$1008x + 2016 = 1008x + 12xx + 24x$$

$$2016 = 12xx + 24x$$

$$12xx = -24x + 2016$$

$$xx = -2x + 168$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 + 168}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{169}$$

$$x = -1 \pm 13$$

$$x = 12.$$

Zween legen 100 fl. in eine Geſellſchaft; der 1te läßt ſein Geld 3 Monate, der andere 2 Monate ſtehen, und ein jeder zieht mit Kapital und Gewinn 99 fl. Wieviel hat jeder eingelegt?

Der 1te x fl.; alſo der andere 100 — x fl. Nun hat der 1te mit x fl. in 3 Monaten 99 — x fl., alſo in einem Monate $\frac{99-x}{3}$ fl. und in einem Monate mit einem Gulden $\frac{99-x}{3x}$ fl. gewonnen: der andere gewann mit 100 — x fl. in zwey Monaten 99 — 100 + x = x — 1 fl.; alſo in einem Monate $\frac{x-1}{2}$ fl., und mit einem Gulden $\frac{x-1}{2} : 100 - x = \frac{x-1}{200-2x}$ fl.

Daher iſt $\frac{x-1}{200-2x} = \frac{99-x}{3x}$

$$3xx - 3x = (99 - x)(200 - 2x)$$

$$3xx - 3x = 19800 - 200x - 198x + 2xx$$

$$xx = -395x + 19800$$

$$x = -\frac{395}{2} \pm \sqrt{\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4}}$$

x

$$x = -\frac{395}{2} \pm \sqrt{\frac{235225}{4}}$$

$$x = -\frac{395}{2} \pm \frac{485}{2}$$

$$x = \frac{485 - 395}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ und}$$

$$100 - x = 100 - 45 = 55.$$

Zween verkauften zuſammen 95 Pferde, einer mehr, als der andere, und löſten doch gleichviel Geld. Hätte nun der 2te ſeine Pferde ſo, wie der erſte verkauft; ſo hätte er $7714\frac{2}{7}$ fl. gelöſet: und hätte der 1te die ſeinigen um den Preis des 2ten verkauft; ſo hätte er nur 2625 fl. gelöſet. Wieviel Pferde hat jeder verkauft?

Der 1te x Pferde, alſo der andere 95 — x Pferde. Hätte der 2te ſeine Pferde wie der 1te verkauft; ſo hätte er aus 95 — x Pferden $7714\frac{2}{7} = \frac{54000}{7}$ fl. alſo aus einem Pferde $\frac{54000}{665-7x}$ fl. gelöſet; um ſoviel hat alſo der 1te jedes Pferd verkauft, folglich aus x Pferden $\frac{54000x}{665-7x}$ fl. gelöſet.

Ebenſo hätte der 1te aus x Pferden 2625 fl., alſo aus einem Pferde $\frac{2625}{x}$ fl. gelöſet; um dieſen Preis hat der 2te 95 — x Pferde verkaufet, alſo $\frac{2625(95-x)}{x} = \frac{249375 - 2625x}{x}$ fl. gelöſet. Beede aber haben gleichviel gelöſet; daher iſt

$$\frac{54000x}{665-7x} = \frac{249375 - 2625x}{x}$$

$$54000xx = (249375 - 2625x)(665 - 7x)$$

$$54000xx = 165834375 - 1745625x - 1745625x$$
$$[+ 18375xx$$
$$35625xx = - 3491250x + 165834375$$
$$xx = - 98x + 4655$$
$$x = - 49 \pm \sqrt{2401 + 4655}$$
$$x = - 49 \pm \sqrt{7056}$$
$$x = - 49 \pm 84$$
$$x = 35, \text{ und } 95 - x = 60.$$

Zween verkaufen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der 1te und löſen zuſammen 35 fl.

Der 1te hätte aus dem Zeuge des andern 24 fl. der andere aber aus dem Zeuge des 1ten nur $12\frac{1}{2}$ fl. gelöſet. Wieviel hatte ein jeder Ellen?

Der 1te x Ellen, alſo der 2te x + 3 Ellen.

Da nun der 1te aus x + 3 Ellen 24 fl. gezogen hätte; ſo hat er aus einer Ellen $\frac{24}{x+3}$ fl., alſo aus x Ellen $\frac{24x}{x+3}$ fl. gelöſet.

Und weil der 2te aus x Ellen $12\frac{1}{2}$ fl. gezogen hätte; ſo hat er aus einer Elle $\frac{25}{2x}$ fl., alſo aus x + 3 Ellen $\frac{25x + 75}{2x}$ fl. gelöſet; daher iſt

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x + 75}{2x} = 35$$
$$\frac{48xx}{x+3} + 25x + 75 = 70x$$
$$48xx + 25xx + 75x + 75x + 225 = 70xx + 210x$$
$$73xx - 70xx = 210x - 225 - 150x$$
$$3xx = 60x - 225$$
$$xx = 20x - 75$$

x

$x = 10 \pm \sqrt{100-75}$
$x = 10 \pm \sqrt{25}$
$x = 10 \pm 5$
$x = 15$ und $x + 3 = 18$ oder
$x = 5$, und $x + 3 = 8$.

276. Bisher haben wir immer nur die Gleichheit der Größen betrachtet: itzt wollen wir auch ihre Ungleichheit unterſuchen. Die Ungleichheit zwoer Größen läßt ſich auf zweyerley Art beſtimmen, dadurch, daß man ausdrücket, **um wieviel** oder **um wievielmal** eine größer iſt, als die andere.

Betrachten wir, um wieviel eine Größe größer iſt, als die andere; ſo betrachten wir ihren Unterſcheid: und ſuchen wir, um wievielmal eine größer iſt, als die andere, oder, welches ebenſoviel heißt, wie oft eine in der andern enthalten iſt; ſo ſuchen wir ihren Quotienten. Der Unterſcheid oder der Quotient zwoer Größen heißt das **Verhältniß** derſelben, jener das **arithmetiſche** und dieſer das **geometriſche Verhältniß.**

Von dem arithmetiſchen Verhältniße zwoer Größen.

177.

Das arithmetiſche Verhältniß zwoer Größen iſt der Unterſcheid derſelben, durch die Größen ſelbſt ausgedrückt.

Iſt $a - b = c$;

ſo heißt $a - b$ das arithmetiſche Verhältniß von a und b, und c der **Unterſcheid** von a und b. Ferner wird a der **Vorſatz** und b der **Nachſatz** des Verhältniſſes genennt.

Iſt $a - b = c$; ſo iſt auch
$a = b + c$ und
$b = a - c$

Wenn alſo zwo von dieſen drey Größen, dem Vorſatze, dem Nachſatze, und dem Unterſcheide bekannt ſind; ſo kann man auch die dritte finden.

Es ſey der Vorſatz 4, der Unterſcheid $\frac{2}{3}$, und der Nachſatz x;

ſo iſt $4 - x = \frac{2}{3}$, alſo
$x = 4 - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ und
das Verhältniß $4 - 3\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Es ſey der Vorſatz 3, der Nachſatz 6 und der Unterſcheid x; ſo iſt $3 - 6 = x$, alſo
$x = -3$ und
das Verhältniß $3 - 6 = -3$

Es ſey der Nachſatz -2, der Unterſcheid 7, und der Vorſatz x;
ſo iſt $x - (-2) = 7$, alſo
$x = 7 - 2 = 5$ und
das Verhältniß $5 - (-2) = 7$

178. Weil $(a+n) - (b+n) = a+n - b - n$
$= a - b$ und
$(a-n) - (b-n) = a - n - b + n$
$= a - b$; ſo iſt
$a - b = (a+n) - (b+n) = (a-n)$
$- (b-n)$, oder

das arithmetiſche Verhältniß bleibt einerley, wenn man zum Vor- und Nachſatze Gleiches addirt, oder Gleiches von beeden abzieht.

So

So iſt $7 - 5 = 8 - 6 = 10 - 8 = 14 - 12$
$= 3 - 1$ ꝛc.
und $2 - 5 = 1 - 4 = 3 - 6 = 0 - 3$
$= - 1 - 2$ ꝛc.

179. Weil $an - bn = n(a - b)$ und
$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n};$$

ſo wird jedes arithmetiſche Verhältniß $a-b$ durch dieſelbe Größe n multiplicirt oder dividirt, durch welche man Vor- und Nachſatz multiplicirt oder dividirt.

So iſt $(7 \times 5) - (3 \times 5) = (7 - 3) \times 5$ und
$$\left(\frac{18}{3}\right) - \left(\frac{6}{3}\right) = \left(\frac{18-6}{3}\right)$$

Von der arithmetiſchen Proportion.

180.

Die arithmetiſche Proportion iſt die Gleichheit zweyer arithmetiſchen Verhältniſſe.

Iſt $a - b = c - d$;

ſo ſtehen dieſe vier Größen a, b, c und d in einer arithmetiſchen Proportion, und heiſſen **Glieder** derſelben.

181. Iſt $a - b = c - d$; ſo iſt auch
$a + d = b + c$.

Daher iſt in jeder arithmetiſchen Proportion die Summe der äußern Glieder $a + d$ gleich der Summe der mittlern $b + c$. Z. B.

Iſt $7 - 3 = 9 - 5$; ſo iſt auch
$7 + 5 = 9 + 3$

182. Iſt $a - b = c - d$ und folglich
$a + d = b + c$; ſo iſt ferner
$a = b + c - d$
$d = b + c - a$
$b = a + d - c$ und
$c = a + d - b$

In einer arithmetiſchen Proportion iſt alſo jedes äuſſere Glied gleich der Summe der mittlern weniger dem andern äuſſern, und jedes mittlere gleich der Summe der äuſſern weniger dem andern mittlern. Z. B.

Iſt $3 - 5 = 7 - x$; ſo wird
$x = 5 + 7 - 3 = 9$

Iſt $x - 3 = 19 - 5$; ſo wird
$x = 19 + 3 - 5 = 17$

Iſt $\frac{1}{2} - x = \frac{3}{4} - 6$; ſo wird
$$x = 6 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{26}{4} - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{23}{4} = 5\,\frac{3}{4}, \text{ und}$$

Iſt endlich $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{6}$; ſo wird
$$x = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12}$$
$$- \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

183. Es ſeyen dieſe vier Größen p, q, m, n, ſo beſchaffen, daß $p + n = q + m$; ſo iſt auch
$p + n - q = m$
$p - q = m - n$

Wenn

Wenn alſo was immer für vier Größen ſo beſchaffen ſind, daß die Summe der äuſſern der Summe der mittlern gleich iſt; ſo ſtehen ſolche allemal in einer arithmetiſchen Proportion.

Iſt z. B. $7 + 5 = 2 + 10$; ſo iſt auch

$$7 - 2 = 10 - 5$$
$$7 - 10 = 2 - 5$$
$$5 - 2 = 10 - 7$$
$$5 - 10 = 2 - 7$$

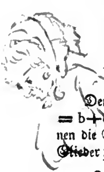
184. Weil in jeder arithmetiſchen Proportion die Summe der äuſſern der Summe der mittlern Glieder gleich iſt; und jede vier Größen allemal in einer Proportion ſtehen, wenn die Summe der äuſſern der Summe der mittlern gleich iſt: ſo kann man in jeder arithmetiſchen Proportion die mittlern, oder die äuſſern Glieder mit einander verwechſeln; die äuſſern anſtatt der mittlern und dieſe anſtatt jener ſetzen; zu einem äuſſern und einem mittlern Gleiches addiren, oder Gleiches von beyden abziehen; und zu einem des äuſſern oder mittlern Paares ebenſoviel addiren, als man von dem andern des nämlichen Paares abzieht.

Iſt daher $a - b = c - d$; ſo iſt

$$a - c = b - d$$
$$d - b = c - a$$
$$d - c = b - a \quad \text{oder}$$
$$b - a = d - c$$
$$b - d = a - c$$
$$c - a = d - b$$
$$c - d = a - b \quad \text{und ferner}$$
$$(a+n) - b = (c+n) - d$$
$$(a+n) - (b+n) = c - d$$
$$a - (b+n) = c - (d+n)$$

a—

$$a - b = (c+n) - (d+n) \text{ oder}$$
$$(a-n) - b = (c-n) - d$$
$$(a-n) - (b-n) = c - d$$
$$a - (b-n) = c - (d-n)$$
$$a - b = (c-n) - (d-n) \text{ und endlich}$$
$$(a+n) - b = c - (d-n)$$
$$(a-n) - b = c - (d+n)$$
$$a - (b+n) = (c-n) - d$$
$$a - (b-n) = (c+n) - d$$



Denn wenn die erſte Proportion wahr iſt: ſo iſt $a+d = b+c$, alſo auch in allen andern angezeigten Proportionen die Summe der äuſſern gleich der Summe der mittlern Glieder; folglich ſind auch dieſe wahr.

185. Iſt $a - b = c - d$; ſo iſt auch
$$a + d = b + c$$

Es giebt aber von $a + d = b + c$

$$\begin{array}{r} a > c \text{ beederſeits abgezogen} \\ \hline d < b \end{array}$$

von $a + d = b + c$

$$\begin{array}{r} a < c \text{ beederſeits abgezogen} \\ \hline d > b \end{array}$$

und von $a + d = b + c$

$$\begin{array}{r} a = c \text{ beederſeits abgezogen} \\ \hline d = b \end{array}$$

Wenn daher in einer arithmetiſchen Proportion ein äuſſeres Glied gröſſer iſt, als ein mittleres; ſo iſt das andere äuſſere kleiner, als das andere mittlere, und umgekehrt: und wenn ein äuſſeres gleich iſt einem mittlern, ſo iſt das andere äuſſere auch gleich dem andern mittlern.

Von der ſteten arithmetiſchen Proportion.

186.

Eine ſtete arithmetiſche Proportion iſt jene, worinn die mittlern Glieder einerley ſind.

$$a - b = b - c$$

b heißt die mittlere arithmetiſchproportionirte, zwiſchen a und c; c die dritte arithmetiſchproportionirte zu a und b, und a die dritte arithmetiſchproportionirte, zu c und b.

Iſt $a - b = b - c$; ſo iſt auch

$$a + c = 2b$$

$$b = \frac{a+c}{2}; \text{ und}$$

Iſt $p = \frac{m+n}{2}$; ſo iſt

$$2p = m+n \text{ und}$$

$$m - p = p - n$$

In einer ſteten arithmetiſchen Proportion iſt alſo das mittlere Glied der halben Summe beyder äuſſern gleich; und die halbe Summe zwoer Größen iſt auch allemal die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen ebendenſelben.

So iſt $\frac{7+4}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen 7 und 4, und $\frac{7+0}{2} = 3\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen 7 und 0.

Von

Von dem geometriſchen Verhältniſſe zwoer Größen.

194.

Dieſes Verhältniß iſt nichts anders, als der Quotient zwoer Größen durch die Größen ſelbſt ausgedrückt.

Iſt a : b = c;

ſo heißt a : b das Verhältniß von a zu b; a der **Vorſatz**, b der **Nachſatz**, und c der **Exponent** deſſelben. Man ließt a zu b iſt gleich c, anſtatt a dividirt durch b iſt gleich c.

Inskünftige ſoll **Verhältniß** allein geſetzt, allemal ein geometriſches Verhältniß bedeuten.

195. Iſt a : b = c; ſo iſt auch

$$a = bc$$

$$b = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{b}$$

Alſo läßt ſich, wenn zwo von dieſen drey Größen, a dem Vorſatze, b dem Nachſatze, und c dem Exponenten des Verhältniſſes gegeben ſind, allemal auch die dritte finden.

Es ſey der Vorſatz $\frac{3}{4}$, der Nachſatz $\frac{2}{3}$ und der Exponent x;

ſo iſt $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = x$

$$x = \frac{9}{8} = 1\ \frac{1}{8}$$

Es

Es ſey der Nachſatz $\frac{5}{6}$, der Exponent 8, und der Vorſatz x; ſo iſt

$$x : \frac{5}{6} = 8$$

$$x = 8 \times \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$$

Es ſey der Vorſatz $-\frac{1}{3}$, der Exponent $\frac{5}{7}$ und der Nachſatz x; ſo iſt

$$-\frac{1}{3} : x = \frac{5}{7}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{5x}{7}$$

$$-\frac{7}{3} = 5x$$

$$x = -\frac{7}{15}.$$

196. Der Quotient bleibt beſtändig, wenn man das Dividend und den Theiler durch Gleiches multiplicirt oder dividirt.

Daher bleibt auch das Verhältniß beſtändig, wenn man den Vor- und Nachſatz deſſelben durch Gleiches multiplicirt oder dividirt.

So oft alſo Vor- und Nachſatz einen gemeinen Theiler haben; ſo können ſolche durch dieſen gemeinen Theiler dividirt, und das Verhältniß kürzer ausgedrückt werden.

So iſt $an : bn = a : b$

$$18 : 6 = 3 : 1$$

$$360 : 180 = 36 : 18 = 6 : 3 = 2 : 1$$

Ebendaher läßt ſich auch jedes Verhältniß, das in Brüchen gegeben iſt, durch ganze Zahlen ausdrücken, wenn man

man Vor- und Nachſatz durch die Nenner dieſer Brüche multiplicirt. So wird

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : c = ad : bc$$

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{3} : 3 = 8 : 9 \text{ und}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{13}{9} = \frac{63}{8} : 13 = 63 : 104.$$

197. Iſt

$$\begin{aligned} a : b &= c \\ m : n &= c \text{ und} \\ p : q &= c\text{; ſo iſt} \\ a &= bc \\ m &= nc \\ p &= qc\text{, und} \\ a + m + p &= bc + nc + qc \\ a + m + p &= (b + n + q)c \\ \frac{a + m + p}{b + n + q} &= c\text{, oder} \\ (a + m + p) : (b + n + q) &= c \end{aligned}$$

Wenn man alſo die Vor- und Nachſätze gleicher Verhältniſſe zuſammenaddirt; ſo kömmt wieder ein Verhältniß heraus, welches dem vorigen gleich iſt.

So weil $6 : 3$ gleich iſt
$4 : 2$; ſo iſt auch

$$(6+4) : (3+2) = 10 : 5 = 6 : 3 = 4 : 2$$

198. Iſt

$$\begin{aligned} a : b &= c \text{ und} \\ m : n &= c\text{; ſo iſt} \\ a &= bc \\ m &= nc\text{, und} \end{aligned}$$

$$a - m = bc - nc$$
$$a - m = (b - n)c$$
$$\frac{a - m}{b - n} = c, \text{ oder}$$
$$(a - m) : (b - n) = c$$

Wenn man daher die Vor- und Nachſätze zweyer gleichen Verhältniſſe voneinander abzieht; ſo kömmt wieder ein gleiches Verhältniß zum Vorſchein.

So weil 6 : 3 gleich iſt
4 : 2; ſo iſt auch

$$(6-4):(3-2)=2:1=6:3=4:2$$

Von dem zuſammengeſetzten Verhältniſſe.

199.

Dieſes Verhältniß iſt das Product der Vorſätze zu dem Producte der Nachſätze mehrerer Verhältniſſe.

So iſt aus dieſen Verhältniſſen a : b
c : d
m : n
p : q

das zuſammengeſetzte acmp : bdnq

und aus dieſen 1 : 2
3 : 5
7 : 11

das zuſammengeſetzte 21 : 110

200. Multipliciret oder dividiret man was immer für einen Vorſatz, und was immer für einen Nachſatz der einfachen Verhältniſſe durch die nämliche Zahl; ſo wird auch das Product der Vorſätze, und das Product der Nachſätze durch ebendieſelbe Zahl multipliciret oder dividiret.

Es bleibt alſo das zuſammengeſetzte Verhältniß immer einerley, wenn was immer für ein Vorſatz, und was immer für ein Nachſatz der einfachen Verhältniſſe durch Gleiches multiplicirt oder dividirt wird.

So iſt aus dieſen Verhältniſſen

$a : b$	oder aus dieſen	$a : 1$
$c : d$		$1 : d$
$b : q$		$1 : q$
$p : c$		$p : 1$

das zuſammengeſetzte $acbp : bdcq = ap : dq$.

Und aus dieſen $a : \frac{b}{n}$	oder aus dieſen	$an : b$
$\frac{d}{m} : c$		$d : cm$

das zuſammengeſetzte $\frac{ad}{m} : \frac{bc}{n} = adn : bcm$.

201. Wenn daher von mehrern gegebenen Verhältniſſen, worinn Brüche vorkommen, das zuſammengeſetzte Verhältniß zu ſuchen iſt; ſo können wir durch jeden Nenner einen Vor- und Nachſatz multipliciren, und ſodann das zuſammengeſetzte Verhältniß in ganzen Zahlen finden.

Sind die gegebenen Verhältniſſe $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$

$$\frac{5}{7} : \frac{4}{11}$$

ſo

ſo werden ſie, die Brüche weggeſchafft, in folgende verwandelt

$$\begin{array}{rcl} 5 \times 1 & : & 3 \times 2 \\ 11 \times 5 & : & 4 \times 7; \end{array}$$

alſo iſt das zuſammengeſetzte $1 \times 5 \times 5 \times 11 : 2 \times 3 \times 4 \times 7$ oder

$$275 : 168$$

Und hat einer aus den Vorſätzen mit einem aus den Nachſätzen einen gemeinen Theiler; ſo können wir beede durch dieſen dividiren, und ſogleich für das zuſammengeſetzte Verhältniß den kürzeſten Ausdruck finden.

Sind die gegebenen Verhältniſſe

$$\begin{array}{rcl} 12 & : & 7 \\ 14 & : & 3 \\ 9 & : & 4 \\ 5 & : & 18 \end{array}$$

ſo werden ſie, abgekürzt, in folgende verwandelt

$$\begin{array}{rcl} 4,\ \cancel{12} & : & \cancel{7} \\ \cancel{2},\ \cancel{14} & : & \cancel{3} \\ \cancel{9} & : & \cancel{4} \\ 5 & : & \cancel{18},\ \cancel{2}; \end{array}$$

alſo iſt das zuſammengeſetzte $5 : 1$

Es ſeyen die gegebenen Verhältniſſe

$$\begin{array}{rcl} 6 & : & \frac{5}{8} \\ \frac{7}{14} & : & 3 \\ 8 & : & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & : & 6; \end{array}$$

ſo werden ſie, die Brüche weggeſchaft,

$$\begin{array}{rcl} 8 \times 6 & : & 5 \\ 7 & : & 3 \times 14 \\ 3 \times 8 & : & 2 \\ 1 & : & 6 \times 8 \end{array}$$

und abgekürzt

$$\begin{array}{rcl} 8 \times \cancel{6} & : & 5 \\ \cancel{7} & : & \cancel{3} \times \cancel{14},\ \cancel{2} \\ 2,\ \cancel{4},\ \cancel{3} \times \cancel{8} & : & \cancel{2} \\ 1 & : & \cancel{6} \times \cancel{8}; \end{array}$$

alſo das zuſammengeſetzte $2 : 5$

Es ſeyen die einfachen Verhältniſſe

$$2 : 3\tfrac{1}{2}$$
$$2 : 4\tfrac{1}{6}$$
$$\tfrac{5}{6} : \tfrac{7}{9}$$

ſo werden ſie, die Brüche weggebracht,

$$2 \times 2 : 7$$
$$2 \times 6 : 25$$
$$9 \times 5 : 7 \times 6$$

und abgekürzt,

$$2 \times 2 : 7$$
$$2 \times \not{6} : \not{25} \quad 5.$$
$$9 \times \not{5} : 7 \times \not{6}, \text{ alſo}$$

das zuſammengeſetzte 72 : 245

202. Wenn die einfachen Verhältniſſe folgende ſind;

a : b
b : c
c : d
d : e
e : f
f : g; ſo iſt

das zuſammengeſetzte a : g.

Alſo iſt das zuſammengeſetzte Verhältniß aus jenen einfachen, die ſo beſchaffen ſind, daß der Nachſatz jedes vorhergehenden allemal auch der Vorſatz des folgenden wird, nichts anders, als das Verhältniß des erſten Vorſatzes zu dem letzten Nachſatze.

In dieſem Verſtande ſagt man, daß jedes Verhältniß a : g aus allen mittlern Verhältniſſen zuſammengeſetzet iſt.

203. Es ſey $a : b = q$

$c : d = q$; ſo iſt

$ac : bd = qq$; allein es iſt auch

$aa : bb = qq$ und

$cc : dd = qq$; alſo

$ac : bd = aa : bb = cc : dd$, und folglich

$\sqrt{ac} : \sqrt{bd} = a : b = c : d$

Es ſey $a : b = q$

$c : b = q$

$m : n = q$; ſo iſt

$acm : bdn = q^3$: allein es iſt auch

$a^3 : b^3 = q^3$

$c^3 : d^3 = q^3$ und

$m^3 : n^3 = q^3$; alſo

$acm : bdn = a^3 : b^3 = c^3 : d^3 = m^3 : n^3$, und folglich

$\sqrt[3]{acm} : \sqrt[3]{bdn} = a : b = c : d = m : n.$

Es ſey $a : b = q$

$c : d = q$

$m : n = q$

$r : S = q$; ſo iſt

$acmr : bdnS = q^4$; allein es iſt auch

$a^4 : b^4 = q^4$

$c^4 : d^4 = q^4$

$m^4 : n^4 = q^4$

$r^4 : S^4 = q^4$; alſo

$acmr : bdns = a^4 : b^4 = c^4 : d^4 = m^4 : n^4 = r^4 : S^4$, und folglich

$\sqrt[4]{acmr} : \sqrt[4]{bdnS} = a : b = c : d = m : n = r : S.$

Es iſt alſo das zuſammengeſetzte Verhältniß aus 2, 3, 4 oder n gleichen Verhältniſſen gleich der 2ten, 3ten, 4ten oder nten Potenz eines jeden der einfachen Verhältniſſe, und jedes einfache gleich

der 2ten, 3ten, 4ten oder nten Wurzel des Zuſammengeſetzten.

So weil 6 : 3 gleich iſt
8 : 4; ſo iſt

$$48 : 12 = 36 : 9 = 64 : 16$$ und
$$\sqrt{48} : \sqrt{12} = 6 : 3 = 8 : 4.$$

Von der geometriſchen Proportion.

204.

Eine geometriſche Proportion iſt die Gleichheit zweyer geometriſchen Verhältniſſe.

Iſt $a : b = c : d$;
ſo ſtehen dieſe vier Größen in einer geometriſchen Proportion, und heiſſen **Glieder** derſelben, a und d die **äuſſern**, b und c die **mittlern**, und d die **vierte geometriſchproportionirte** zu a, b und c.

Man lieſt, anſtatt a dividirt durch b iſt gleich c dividirt durch d, a verhält ſich zu b, wie c zu d, oder auch nur a zu b, wie c zu d.

In der Folge werden wir unter **Proportion**, allein geſetzt, allemal eine geometriſche Proportion verſtehen.

205. Verhält ſich $a : b = c : d$; ſo iſt auch

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$
$$ad = bc$$
$$a = \frac{bc}{d}$$
$$d = \frac{bc}{a}$$

$$b = \frac{ad}{c} \text{ und}$$

$$c = \frac{ad}{b}.$$

Folglich iſt in jeder Proportion das Product der äuſſern allemal gleich dem Producte der mittlern Glieder, jedes äuſſere gleich dem Producte der mittlern dividirt, durch das andere äuſſere, und jedes mittlere gleich dem Producte der äuſſern, dividirt durch das andere mittlere.

Es läßt ſich daher zu drey gegebenen Größen a, b, und c, allemal die vierte Proportionirte d finden. Und überhaupt wird jedes Glied einer Proportion durch die drey übrigen bekannt.

Es ſey $4 : 5 = 7 : x$; ſo iſt

$$4x = 35$$
$$x = 8\tfrac{3}{4}$$

Es ſey $5 : 3 = x : \frac{1}{2}$; ſo iſt

$$3x = \frac{5}{2}$$
$$x = \frac{5}{6}$$

Es ſey $\frac{2}{3} : x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$; ſo iſt

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{12}$$
$$x = \frac{12}{12} = 1$$

Iſt $7 - 3 = 9 - 5$; ſo iſt auch
$7 + 5 = 9 + 3$

182. Iſt $a - b = c - d$ und folglich
$a + d = b + c$; ſo iſt ferner
$a = b + c - d$
$d = b + c - a$
$b = a + d - c$ und
$c = a + d - b$

In einer arithmetiſchen Proportion iſt alſo jedes äuſſere Glied gleich der Summe der mittlern weniger dem andern äuſſern, und jedes mittlere gleich der Summe der äuſſern weniger dem andern mittlern. z. B.

Iſt $3 - 5 = 7 - x$; ſo wird
$x = 5 + 7 - 3 = 9$

Iſt $x - 3 = 19 - 5$; ſo wird
$x = 19 + 3 - 5 = 17$

Iſt $\frac{1}{2} - x = \frac{3}{4} - 6$; ſo wird

$$x = 6 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{26}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{23}{4} = 5\,\frac{3}{4},$$ und

Iſt endlich $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{6}$; ſo wird

$$x = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12}$$

$$- \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

183. Es ſeyen dieſe vier Größen p, q, m, n, ſo beſchaffen, daß $p + n = q + m$; ſo iſt auch
$p + n - q = m$
$p - q = m - n$

Wenn

Wenn alſo was immer für vier Größen ſo beſchaffen ſind, daß die Summe der äuſſern der Summe der mittlern gleich iſt; ſo ſtehen ſolche allemal in einer arithmetiſchen Proportion.

Iſt z. B. $7 + 5 = 2 + 10$; ſo iſt auch

$$7 - 2 = 10 - 5$$
$$7 - 10 = 2 - 5$$
$$5 - 2 = 10 - 7$$
$$5 - 10 = 2 - 7$$

184. Weil in jeder arithmetiſchen Proportion die Summe der äuſſern der Summe der mittlern Glieder gleich iſt; und jede vier Größen allemal in einer Proportion ſtehen, wenn die Summe der äuſſern der Summe der mittlern gleich iſt: ſo kann man in jeder arithmetiſchen Proportion die mittlern, oder die äuſſern Glieder mit einander verwechſeln; die äuſſern anſtatt der mittlern und dieſe anſtatt jener ſetzen; zu einem äuſſern und einem mittlern Gleiches addiren, oder Gleiches von beyden abziehen; und zu einem des äuſſern oder mittlern Paares ebenſoviel addiren, als man von dem andern des nämlichen Paares abzieht.

Iſt daher $a - b = c - d$; ſo iſt

$$a - c = b - d$$
$$d - b = c - a$$
$$d - c = b - a \text{ oder}$$
$$b - a = d - c$$
$$b - d = a - c$$
$$c - a = d - b$$
$$c - d = a - b \text{ und ferner}$$
$$(a+n) - b = (c+n) - d$$
$$(a+n) - (b+n) = c - d$$
$$a - (b+n) = c - (d+n)$$

a—

$$a - b = (c+n) - (d+n) \text{ oder}$$
$$(a-n) - b = (c-n) - d$$
$$(a-n) - (b-n) = c - d$$
$$a - (b-n) = c - (d-n)$$
$$a - b = (c-n) - (d-n) \text{ und endlich}$$
$$(a+n) - b = c - (d-n)$$
$$(a-n) - b = c - (d+n)$$
$$a - (b+n) = (c-n) - d$$
$$a - (b-n) = (c+n) - d$$

Denn wenn die erſte Proportion wahr iſt: ſo iſt $a+d = b+c$, alſo auch in allen andern angezeigten Proportionen die Summe der äuſſern gleich der Summe der mittlern Glieder; folglich ſind auch dieſe wahr.

185. Iſt $a - b = c - d$; ſo iſt auch $a + d = b + c$

Es giebt aber von $a + d = b + c$
$a > c$ beederſeits abgezogen
$d < b$

von $a + d = b + c$
$a < c$ beederſeits abgezogen
$d > b$

und von $a + d = b + c$
$a = c$ beederſeits abgezogen
$d = b$

Wenn daher in einer arithmetiſchen Proportion ein äuſſeres Glied gröſſer iſt, als ein mittleres; ſo iſt das andere äuſſere kleiner, als das andere mittlere, und umgekehrt: und wenn ein äuſſeres gleich iſt einem mittlern, ſo iſt das andere äuſſere auch gleich dem andern mittlern.

Von

Von der ſteten arithmetiſchen Proportion.

186.

Eine ſtete arithmetiſche Proportion iſt jene, worinn die mittlern Glieder einerley ſind.

$$a - b = b - c$$

b heißt die mittlere arithmetiſchproportionirte, zwiſchen a und c; c die dritte arithmetiſchproportionirte zu a und b, und a die dritte arithmetiſchproportionirte, zu c und b.

Iſt $a - b = b - c$; ſo iſt auch
$a + c = 2b$
$b = \frac{a+c}{2}$; und

Iſt $p = \frac{m+n}{2}$; ſo iſt
$2p = m+n$ und
$m - p = p - n$

In einer ſteten arithmetiſchen Proportion iſt alſo das mittlere Glied der halben Summe beyder äuſſern gleich; und die halbe Summe zwoer Größen iſt auch allemal die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen ebendenſelben.

So iſt $\frac{7+4}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen 7 und 4, und $\frac{7+0}{2} = 3\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetiſchproportionirte zwiſchen 7 und 0.

Von

Von dem geometriſchen Verhältniſſe zwoer Größen.

194.

Dieſes Verhältniß iſt nichts anders, als der Quotient zwoer Größen durch die Größen ſelbſt ausgedrückt.

Iſt a : b = c;

ſo heißt a : b das Verhältniß von a zu b; a der **Vorſatz**, b der **Nachſatz**, und c der **Exponent** deſſelben. Man ließt a zu b iſt gleich c, anſtatt a dividirt durch b iſt gleich c.

Inskünftige ſoll **Verhältniß** allein geſetzt, allemal ein geometriſches Verhältniß bedeuten.

195. Iſt a : b = c; ſo iſt auch

$$a = bc$$

$$b = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{b}$$

Alſo läßt ſich, wenn zwo von dieſen drey Größen, a dem Vorſatze, b dem Nachſatze, und c dem Exponenten des Verhältniſſes gegeben ſind, allemal auch die dritte finden.

Es ſey der Vorſatz $\frac{3}{4}$, der Nachſatz $\frac{2}{3}$ und der Exponent x;

ſo iſt $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = x$

$$x = \frac{9}{8} = 1\,\frac{1}{8}$$

Es

Es ſey der Nachſatz $\frac{5}{6}$, der Exponent 8, und der Vorſatz x; ſo iſt

$$x : \frac{5}{6} = 8$$

$$x = 8 \times \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$$

Es ſey der Vorſatz $-\frac{1}{3}$, der Exponent $\frac{5}{7}$ und der Nachſatz x; ſo iſt

$$-\frac{1}{3} : x = \frac{5}{7}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{5x}{7}$$

$$-\frac{7}{3} = 5x$$

$$x = -\frac{7}{15}.$$

196. Der Quotient bleibt beſtändig, wenn man das Dividend und den Theiler durch Gleiches multiplicirt oder dividirt.

Daher bleibt auch das Verhältniß beſtändig, wenn man den Vor- und Nachſatz deſſelben durch Gleiches multiplicirt oder dividirt.

So oft alſo Vor- und Nachſatz einen gemeinen Theiler haben; ſo können ſolche durch dieſen gemeinen Theiler dividirt, und das Verhältniß kürzer ausgedrücket werden.

So iſt $an : bn = a : b$

$$18 : 6 = 3 : 1$$

$$360 : 180 = 36 : 18 = 6 : 3 = 2 : 1$$

Ebendaher läßt ſich auch jedes Verhältniß, das in Brüchen gegeben iſt, durch ganze Zahlen ausdrücken, wenn man

man Vor- und Nachſatz durch die Nenner dieſer Brüche multiplicirt. So wird

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : c = ad : bc$$

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{3} : 3 = 8 : 9 \text{ und}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{13}{9} = \frac{63}{8} : 13 = 63 : 104.$$

197. Iſt

$$a : b = c$$
$$m : n = c \text{ und}$$
$$p : q = c; \text{ ſo iſt}$$
$$a = bc$$
$$m = nc$$
$$p = qc, \text{ und}$$
$$a + m + p = bc + nc + qc$$
$$a + m + p = (b + n + q)c$$
$$\frac{a + m + p}{b + n + q} = c, \text{ oder}$$
$$(a + m + p) : (b + n + q) = c$$

Wenn man alſo die Vor- und Nachſätze gleicher Verhältniſſe zuſammenaddirt; ſo kömmt wieder ein Verhältniß heraus, welches dem vorigen gleich iſt.

So weil $6 : 3$ gleich iſt
$4 : 2$; ſo iſt auch

$$(6+4) : (3+2) = 10 : 5 = 6 : 3 = 4 : 2$$

198. Iſt $a : b = c$ und

$$m : n = c; \text{ ſo iſt}$$
$$a = bc$$
$$m = nc, \text{ und}$$

$$a - m = bc - nc$$
$$a - m = (b - n)c$$
$$\frac{a - m}{b - n} = c, \text{ oder}$$
$$(a - m) : (b - n) = c$$

Wenn man daher die Vor- und Nachſätze zweyer gleichen Verhältniſſe voneinander abzieht; ſo kömmt wieder ein gleiches Verhältniß zum Vorſchein.

So weil 6 : 3 gleich iſt
4 : 2; ſo iſt auch

$$(6-4):(3-2) = 2:1 = 6:3 = 4:2$$

Von dem zuſammengeſetzten Verhältniſſe.

199.

Dieſes Verhältniß iſt das Product der Vorſätze zu dem Producte der Nachſätze mehrerer Verhältniſſe.

So iſt aus dieſen Verhältniſſen a : b
c : d
m : n
p : q

das zuſammengeſetzte acmp : bdnq
und aus dieſen 1 : 2
3 : 5
7 : 11

das zuſammengeſetzte 21 : 110

200. Multipliciret oder dividiret man was immer für einen Vorſatz, und was immer für einen Nachſatz der einfachen Verhältniſſe durch die nämliche Zahl; ſo wird auch das Product der Vorſätze, und das Product der Nachſätze durch ebendieſelbe Zahl multipliciret oder dividiret.

Es bleibt alſo das zuſammengeſetzte Verhältniß immer einerley, wenn was immer für ein Vorſatz, und was immer für ein Nachſatz der einfachen Verhältniſſe durch Gleiches multiplicirt oder dividirt wird.

So iſt aus dieſen Verhältniſſen

$a : b$	oder aus dieſen	$a : 1$
$c : d$		$1 : d$
$b : q$		$1 : q$
$p : c$		$p : 1$

das zuſammengeſetzte $acbp : bdcq = ap : dq$.

Und aus dieſen $a : \frac{b}{n}$	oder aus dieſen	$an : b$
$\frac{d}{m} : c$		$d : cm$

das zuſammengeſetzte $\frac{ad}{m} : \frac{bc}{n} = adn : bcm$.

201. Wenn daher von mehrern gegebenen Verhältniſſen, worinn Brüche vorkommen, das zuſammengeſetzte Verhältniß zu ſuchen iſt; ſo können wir durch jeden Nenner einen Vor- und Nachſatz multipliciren, und ſodann das zuſammengeſetzte Verhältniß in ganzen Zahlen finden.

Sind die gegebenen Verhältniſſe $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$

$\frac{5}{7} : \frac{4}{11}$

ſo

ſo werden ſie, die Brüche weggeſchafft, in folgende verwandelt

$$\begin{array}{rcl} 5 \times 1 & : & 3 \times 2 \\ 11 \times 5 & : & 4 \times 7; \text{ alſo iſt} \end{array}$$

das zuſammengeſetzte $1 \times 5 \times 5 \times 11 : 2 \times 3 \times 4 \times 7$ oder $275 : 168$

Und hat einer aus den Vorſätzen mit einem aus den Nachſätzen einen gemeinen Theiler; ſo können wir beede durch dieſen dividiren, und ſogleich für das zuſammengeſetzte Verhältniß den kürzeſten Ausdruck finden.

Sind die gegebenen Verhältniſſe

$$\begin{array}{rcl} 12 & : & 7 \\ 14 & : & 3 \\ 9 & : & 4 \\ 5 & : & 18 \end{array}$$

ſo werden ſie, abgekürzt, in folgende verwandelt

$$\begin{array}{rcl} 4,\ \cancel{12} & : & \cancel{7} \\ \cancel{2},\ \cancel{14} & : & \cancel{3} \\ \cancel{9} & : & \cancel{4} \\ 5 & : & \cancel{18},\ \cancel{2}; \text{ alſo iſt} \end{array}$$

das zuſammengeſetzte $5 : 1$

Es ſeyen die gegebenen Verhältniſſe

$$\begin{array}{rcl} 6 & : & \frac{5}{8} \\ \frac{7}{14} & : & 3 \\ 8 & : & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & : & 6; \end{array}$$

ſo werden ſie, die Brüche weggeſchaft,

$$\begin{array}{rcl} 8 \times 6 & : & 5 \\ 7 & : & 3 \times 14 \\ 3 \times 8 & : & 2 \\ 1 & : & 6 \times 8 \end{array}$$

und abgekürzt

$$\begin{array}{rcl} \cancel{8} \times \cancel{6} & : & 5 \\ \cancel{7} & : & \cancel{3} \times \cancel{14},\ \cancel{2} \\ 2,\ \cancel{4},\ \cancel{3} \times 8 & : & \cancel{2} \\ 1 & : & \cancel{6} \times \cancel{8}; \text{ alſo} \end{array}$$

das zuſammengeſetzte $2 : 5$

Es ſeyen die einfachen Verhältniſſe

$$2 : 3\tfrac{1}{2}$$
$$2 : 4\tfrac{1}{6}$$
$$\tfrac{5}{6} : \tfrac{7}{9}$$

ſo werden ſie, die Brüche weggebracht,

$$2 \times 2 : 7$$
$$2 \times 6 : 25$$
$$9 \times 5 : 7 \times 6$$

und abgekürzt,

$$2 \times 2 : 7$$
$$2 \times \not{6} : \not{25} \quad 5,$$
$$9 \times \not{5} : 7 \times \not{6}, \text{ alſo}$$

das zuſammengeſetzte 72 : 245

202. Wenn die einfachen Verhältniſſe folgende ſind;

a : b
b : c
c : d
d : e
e : f
f : g; ſo iſt

das zuſammengeſetzte a : g.

Alſo iſt das zuſammengeſetzte Verhältniß aus jenen einfachen, die ſo beſchaffen ſind, daß der Nachſatz jedes vorhergehenden allemal auch der Vorſatz des folgenden wird, nichts anders, als das Verhältniß des erſten Vorſatzes zu dem letzten Nachſatze.

In dieſem Verſtande ſagt man, daß jedes Verhältniß a : g aus allen mittlern Verhältniſſen zuſammengeſetzet iſt.

203.

203. Es ſey $a : b = q$
$c : d = q$; ſo iſt

$ac : bd = qq$; allein es iſt auch
$aa : bb = qq$ und
$cc : dd = qq$; alſo
$ac : bd = aa : bb = cc : dd$, und folglich
$\sqrt{ac} : \sqrt{bd} = a : b = c : d$

Es ſey $a : b = q$
$c : b = q$
$m : n = q$; ſo iſt

$acm : bdn = q^3$: allein es iſt auch
$a^3 : b^3 = q^3$
$c^3 : d^3 = q^3$ und
$m^3 : n^3 = q^3$; alſo
$acm : bdn = a^3 : b^3 = c^3 : d^3 = m^3 : n^3$, und folglich
$\sqrt[3]{acm} : \sqrt[3]{bdn} = a : b = c : d = m : n$.

Es ſey $a : b = q$
$c : d = q$
$m : n = q$
$r : S = q$; ſo iſt

$acmr : bdnS = q^4$; allein es iſt auch
$a^4 : b^4 = q^4$
$c^4 : d^4 = q^4$
$m^4 : n^4 = q^4$
$r^4 : S^4 = q^4$; alſo
$acmr : bdns = a^4 : b^4 = c^4 : d^4 = m^4 : n^4 = r^4 : S^4$, und folglich
$\sqrt[4]{acmr} : \sqrt[4]{bdnS} = a : b = c : d = m : n = r : S$.

Es iſt alſo das zuſammengeſetzte Verhältniß aus 2, 3, 4 oder n gleichen Verhältniſſen gleich der 2ten, 3ten, 4ten oder nten Potenz eines jeden der einfachen Verhältniſſe, und jedes einfache gleich

 der

der 2ten, 3ten, 4ten oder nten Wurzel des Zuſammengeſetzten.

So weil 6 : 3 gleich iſt
8 : 4; ſo iſt

$$48 : 12 = 36 : 9 = 64 : 16 \text{ und}$$
$$\sqrt{48} : \sqrt{12} = 6 : 3 = 8 : 4.$$

Von der geometriſchen Proportion.

204.

Eine geometriſche Proportion iſt die Gleichheit zweyer geometriſchen Verhältniſſe.

Iſt $a : b = c : d$;
ſo ſtehen dieſe vier Größen in einer geometriſchen Proportion, und heiſſen **Glieder** derſelben, a und d die **äuſſern**, b und c die **mittlern**, und d die **vierte geometriſchproportionirte** zu a, b und c.

Man ließt, anſtatt a dividirt durch b iſt gleich c dividirt durch d, a verhält ſich zu b, wie c zu d, oder auch nur a zu b, wie c zu d.

In der Folge werden wir unter **Proportion**, allein geſetzt, allemal eine geometriſche Proportion verſtehen.

205. Verhält ſich $a : b = c : d$; ſo iſt auch

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$
$$ad = bc$$
$$a = \frac{bc}{d}$$
$$d = \frac{bc}{a}$$

$$b = \frac{ad}{c} \text{ und}$$

$$c = \frac{ad}{b}.$$

Folglich iſt in jeder Proportion das Product der äuſſern allemal gleich dem Producte der mittlern Glieder, jedes äuſſere gleich dem Producte der mittlern dividirt, durch das andere äuſſere, und jedes mittlere gleich dem Producte der äuſſern, dividirt durch das andere mittlere.

Es läßt ſich daher zu drey gegebenen Größen a, b, und c, allemal die vierte Proportionirte d finden. Und überhaupt wird jedes Glied einer Proportion durch die drey übrigen bekannt.

Es ſey $4 : 5 = 7 : x$; ſo iſt

$$4x = 35$$

$$x = 8\tfrac{3}{4}$$

Es ſey $5 : 3 = x : \frac{1}{2}$; ſo iſt

$$3x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Es ſey $\frac{2}{3} : x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$; ſo iſt

$$\frac{x}{2} = \frac{6}{12}$$

$$x = \frac{12}{12} = 1$$

Es ſey $x : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} : \frac{6}{7}$; ſo iſt

$$\frac{6x}{7} = \frac{15}{24}$$

$$6x = \frac{105}{24}$$

$$144x = 105$$

$$x = \frac{105}{144} = \frac{35}{48}$$

206. Es ſeyen die vier Größen, p, q, m, n, ſo beſchaffen, daß

$pn = qm$; ſo iſt auch

$$\frac{pn}{q} = m$$

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \text{ oder}$$

$$p : q = m : n.$$

Wenn alſo vier Größen ſo beſchaffen ſind, daß das Product der äuſſern gleich iſt dem Producte der mittlern: ſo ſtehen ſolche auch allemal in einer Proportion.

207. Es kann daher jede Gleichung, nachdem ihre Glieder in Factoren aufgelöſet ſind, gar leicht in eine Proportion verwandelt werden, wenn man ein Glied der Gleichung für das Product der äuſſern, und das andere für das Product der mittlern Glieder der Proportion annimmt.

Es ſey $ab = pq$; ſo iſt, da wir ab als das Product der äuſſern, und pq als das Product der mittlern Glieder anſehen,

$$a : p = q : b$$
$$a : q = p : b$$

$b : p = q : a$
$b : q = p : a$ oder
da wir pq für das Product der äuſſern und ab für jenes der mittlern annehmen.

$p : a = b : q$
$p : b = a : q$
$q : a = b : p$
$q : b = a : p$

208. Weil in einer Proportion das Product der äuſſern Glieder allemal dem Producte der mittlern gleich iſt; und vier Größen auch allemal in einer Proportion ſtehen, ſobald das Product der äuſſern dem Producte der mittlern gleich iſt: ſo können die Glieder einer Proportion auf ſo vielerley Art verwechſelt oder verändert werden, auf wie vielerley Art es möglich iſt, ſie zu verwechſeln oder zu verändern, ohne die Gleichheit zwiſchen dem Producte der äuſſern und dem Producte der mittlern Glieder zu heben. Verwechſelt man aber in jeder Proportion die beyden mittlern, oder die beyden äuſſern miteinander, oder auch das mittlere Paar mit dem äuſſern Paare; ſo bleiben die Producte der mittlern und äuſſern Glieder immer einerley, folglich bleibt auch die Proportion.

Iſt daher
$a : b = c : d$; ſo iſt auch, die mittlern verwechſelt,
$a : c = b : d$, die äuſſern in der erſten
$d : b = c : a$, die äuſſern in der zwoten
$d : c = b : a$, das äuſſere Paar mit dem mittlern
$b : a = d : c$, die mittlern in dieſer
$b : d = a : c$, die äuſſern in der fünften
$c : a = d : b$, die äuſſern in der ſechſten
$c : d = a : b$.

Alſo läßt ſich jede Proportion mit Verwechſelung der mittlern und äuſſern Glieder auf achterley Art vorſtellen.

209. Multiplicirt oder dividirt man ferner ein mittleres und äuſſeres Glied einer Proportion durch die nämliche Zahl; ſo wird auch ebendadurch das Product der mittlern und das Product der äuſſern multiplicirt oder dividirt: dieſe Producte bleiben alſo wieder einander gleich.

Folglich bleibt die Proportion, wenn man ein mittleres und ein äuſſeres Glied derſelben durch Gleiches multiplicirt oder dividirt.

Verhält ſich daher $a : b = c : d$;
ſo verhält ſich auch $an : b = cn : d$

$$an : bn = c : d$$
$$a : bn = c : dn$$
$$a : b = cn : dn, \text{ oder}$$
$$\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$$
$$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$$
$$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$$
$$a : b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$$

210. Ein Product bleibt beſtändig, wenn man einen ſeiner Factoren durch jede Zahl multiplicirt, und den andern durch die nämliche dividirt.

Folglich bleibt auch die Proportion, wenn man ein mittleres durch jede Zahl multiplicirt und das andere mittlere durch die nämliche dividirt, oder ebenſo ein äuſſeres durch jede Zahl multiplicirt, und das andere äuſſere durch die nämliche dividirt.

Verhält ſich daher $a : b = c : d$;

ſo verhält ſich auch $a : bn = \frac{c}{n} : d$

$$a : \frac{b}{n} = cn : d$$

$$an : b = c : \frac{d}{n}$$

$$\frac{a}{n} : b = c : dn$$

211. Verhält ſich $a : b = c : d$; ſo iſt
$ad = bc$, alſo auch, bd oder
ac beederſeits addirt oder abgezogen,

1tens
$$ad + bd = bc + bd$$
$$(a+b)\,d = (c+d)b$$
$$(a+b) : b = (c+d) : d$$

2tens
$$ad - bd = bc - bd$$
$$(a-b)d = (c-d)b$$
$$(a-b) : b = (c-d) : d$$

3tens
$$bd - ad = bd - bc$$
$$(b-a)d = (d-c)b$$
$$(b-a) : b = (d-c) : d$$

4tens
$$ac + ad = ac + bc$$
$$(c+d)a = (a+b)c$$
$$(a+b) : a = (c+d) : c$$

5tens
$$ac - ad = ac - bc$$
$$(c-d)a = (a-b)c$$
$$(a-b) : a = (c-d) : c$$

6tens
$$ad - ac = bc - ac$$
$$(d-c)a = (b-a)c$$
$$(b-a) : a = (d-c) : c$$

Ferner iſt 7tens $bc - ad = ad - bc$, und
$ac - bd = ac - bd$ beederſeits addirt,

$$ac + bc - ad - bd = ac + ad - bc - bd, \text{ oder}$$
$$(a+b)(c-d) = (c+d)(a-b), \text{ folglich}$$
$$(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$$

End.

Endlich iſt 8tens $ad - bc = bc - ad$ und

$bd - ac = bd - ac$ beederſeits addirt,

$$ad + bd - ac - bc = bc + bd - ac - ad,$$ oder

$$(a+b)(d-c) = (c+d)(b-a),$$ folglich

$$(a+b):(b-a) = (c+d):(d-c)$$

Es verhält ſich daher in jeder Proportion die Summe oder Unterſcheid der zwey erſten Glieder zum erſten oder zweyten, wie die Summe oder Unterſcheid der zwey letzten zum dritten oder vierten, und ferner die Summe der zwey erſten zu ihrem Unterſcheide, wie die Summe der zwey letzten zum Unterſcheide der zwey letzten.

212. Verhält ſich $a : b = c : d$; ſo iſt

$ad = bc$, alſo

1tens $(ad)^n = (bc)^n$, oder

$a^n d^n = b^n c^n$, folglich

$a^n : b^n = c^n : d^n$ und

2tens $\sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc}$, oder

$(ad)^{\frac{1}{n}} = (bc)^{\frac{1}{n}}$

$a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$, folglich

$a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$, oder

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

So oft alſo vier Größen in einer Proportion ſtehen; ſo ſtehen auch ihre gleichnamigen Potenzen oder ihre gleichnamigen Wurzeln in einer Proportion.

213. Es ſey $a : b = c : d$, folglich

$ad = bc$.

Nun iſt $a < b$; ſo wird

$$\frac{ad}{a} > \frac{bc}{b}$$

$$d > c$$

und

und iſt $a > b$; ſo wird

$$\frac{ad}{a} < \frac{bc}{b}$$

$$d < c:$$

endlich iſt $a = b$; ſo wird

$$\frac{ad}{a} = \frac{bc}{b}$$

$$d = c.$$

Nachdem daher in einer Proportion ein äuſſeres Glied kleiner, größer oder gleich iſt einem mittlern; ſo iſt das andere äuſſere größer, kleiner, oder gleich dem andern mittlern.

214. Verhält ſich $a : b = c : d$ und

$p : q = m : n$; ſo iſt

$$ad = bc \text{ und}$$

$$pn = qm, \text{ alſo}$$

1tens $adpn = bcqm$ oder

$$ap \times dn = bq \times cm, \text{ folglich}$$

$$ap : bq = cm : dn; \text{ und}$$

2tens $\frac{ad}{pn} = \frac{bc}{qm}$ oder

$$\frac{a}{p} \times \frac{d}{n} = \frac{b}{q} \times \frac{c}{m}, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

Wird daher eine Proportion Glied vor Glied durch eine andere multiplicirt oder dividirt; ſo entſteht allemal wieder eine Proportion.

215. Wenn die beyden mittlern oder die beyden äuſſern Glieder einer Proportion mit den beyden äuſſern oder den beyden mittlern einer andern Proportion einerley ſind; ſo wird das Product der zwey übrigen Glieder einer Proportion gleich dem Producte der zwey übrigen Glieder der andern Pro-

Proportion. Folglich können auch dieſe vier verſchiedene Glieder allemal in eine Proportion gebracht werden. Z. B.

Verhält ſich $a : b = c : d$ und
$m : c = b : n$; ſo iſt
$ad = bc$ und
$mn = bc$, alſo
$ad = mn$ und
$a : m = n : d$

Verhält ſich $a : b = c : d$ und
$d : m = n : a$; ſo iſt
$ad = bc$ und
$ad = mn$, alſo
$bc = mn$ und
$b : m = n : c$

Verhält ſich $a : b = c : d$
$c : m = n : b$; ſo iſt
$ad = bc$ und
$mn = bc$, alſo
$ad = mn$ und
$a : m = n : d$ &c.

Und wenn ein äuſſeres und ein mittleres Glied einer Proportion mit einem mittlern und einem äuſſeren Gliede einer andern Proportion einerley ſind; ſo werden in den zwo Gleichungen, die daraus folgen, zwey Glieder den einen gemeinen Factor, und die zwey andern Glieder den andern gemeinen Factor enthalten; alſo dieſe Gleichungen miteinander multiplicirt oder dividirt eine dritte Gleichung geben, die nur noch die vier verſchiedenen Glieder enthält. Folglich können auch in dieſem Falle dieſe vier verſchiedenen Glieder allemal in eine Proportion gebracht werden. Z. B.

Verhält ſich $a : b = c : d$
$m : a = n : c$; ſo iſt
$ad = bc$ und
$cm = an$, alſo
$adcm = abcn$ oder

$$dm = bn\text{, folglich}$$
$$b : d = m : n$$

Verhält ſich $a : b = c : d$ und
$m : c = n : a$; ſo iſt
$$ad = bc \text{ und}$$
$$am = cn\text{, alſo}$$
$$\frac{ad}{am} = \frac{bc}{cn} \text{ oder}$$
$$\frac{d}{m} = \frac{b}{n}\text{, folglich}$$
$$b : n = d : m$$

Verhält ſich $a : b = c : d$ und
$d : m = c : n$; ſo iſt
$$ad = bc \text{ und}$$
$$dn = cm\text{, alſo}$$
$$\frac{ad}{dn} = \frac{bc}{cm} \text{ oder}$$
$$\frac{a}{n} = \frac{b}{m}\text{, folglich}$$
$$a : n = b : m.$$

Iſt endlich ein äuſſeres und ein mittleres Paar Glieder einer Proportion einerley mit einem mittlern und einem äuſſern Gliede der andern Proportion; ſo werden die zween gemeinen Factoren in der Gleichung, welche aus jener Proportion folgt, in dem nämlichen Gliede: in der Gleichung aber, welche aus dieſer Proportion folgt, einer in dem einen, und der andere in dem andern Gliede vorkommen; folglich einander nie aufheben. Daher können in dieſem Falle die vier verſchiedenen Glieder auf keine Weiſe mehr in eine Proportion geſeßt werden. Z. B.

Verhält ſich $a : b = c : d$ und
$m : b = n : c$; ſo iſt
$$ad = bc \text{ und}$$
$$mc = bn.$$

Alſo

Alſo kann zwiſchen a, d, m, und n nie eine Proportion folgen.

So oft daher zwey Glieder einer Proportion mit zweyen Gliedern einer andern Proportion einerley ſind; ſo können die vier übrigen allemal auch in eine Proportion geſetzet werden; auſſer es wäre ein mittleres oder äuſſeres Paar in einer gleich einem mittlern und einem äuſſern Gliede in der andern Proportion.

Von der ſteten geometriſchen Proportion.

316.

Eine ſtete geometriſche Proportion iſt jene, worinn die mittlern Glieder einerley ſind.

$$a : b = b : c$$

b wird die **mittlere Proportionirte** zwiſchen a und c, c die **dritte Proportionirte** zu a und b, und a die **dritte Proportionirte** zu c und b genennet.

Verhält ſich $a : b = b : c$; ſo iſt

$$ac = bb$$

$$a = \frac{bb}{c}$$

$$c = \frac{bb}{a}$$

$$b = \sqrt{ac}$$

Daher iſt in einer ſteten Proportion das Quadrat des mittlern Gliedes allemal gleich dem Producte der äuſſern, jedes äuſſere gleich dem Quadrate des mittlern dividirt durch das andere äuſſere, und das mittlere gleich der Wurzel aus dem Producte beyder äuſſern.

Folglich läßt ſich, wenn zwo von dieſen drey Größen bekannt ſind, allemal auch die noch übrige finden.

Es

Es ſey $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} : x$; ſo iſt

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

Es ſey $\frac{1}{5} : x = x : \frac{4}{5}$; ſo iſt

$$\frac{4}{25} = xx$$

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{4}{25}}$$

$$x = \pm \frac{2}{5}$$

Es ſey $x : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} : 4$; ſo iſt

$$4\,x = \frac{4}{9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

217. Iſt $xx = pq$; ſo verhält ſich

$$p : x = x : q$$

Iſt daher das Quadrat einer Größe gleich einem Producte; ſo iſt die Größe allemal die mittlere Proportionirte zwiſchen den Factoren dieſes Products.

218. Verhält ſich $a : b = b : c$;
ſo iſt das Verhältniß $a : c$ aus den zwey mittlern gleichen Verhältniſſen $a:b$ und $b:c$ zuſammengeſetzt; alſo gleich dem Quadrate eines jeden der einfachen, und jedes einfache wieder gleich der Wurzel des zuſammengeſetzten. Oder es verhält ſich

$$a : c = aa : bb = bb : cc \text{ und wieder}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{c} = a : b = b : c.$$

Anwendung der Lehre der Proportionen.

219.

Wenn zwo Größen zu zwo andern gehören, und ſich die erſte zur zwoten verhält, wie die, welche zur erſten gehört, zu der, welche zur zwoten gehört; ſo ſagt man, die zwo erſten ſtehen mit den zwo letztern im **geraden** Verhältniſſe: verhält ſich aber die erſte zur zwoten, wie die, welche zur zwoten gehört, zu der, welche zur erſten gehört; ſo ſagt man, die zwo erſtern ſtehen mit den zwo letztern im **verkehrten** Verhältniſſe.

$$\text{So weil } \frac{a}{q} : \frac{b}{q} = a : b;$$

ſo heißt es: Brüche, die gleiche Nenner haben, ſtehen im geraden Verhältniſſe mit ihren Zählern, oder verhalten ſich **gerade**, wie ihre Zähler; weil der erſte Bruch zum zweyten wie der Zähler des erſten zum Zähler des zweyten.

$$\text{Und weil } \frac{a}{p} : \frac{a}{q} = q : p;$$

ſo heißt es: Brüche die gleiche Zähler haben, ſtehen im verkehrten Verhältniſſe mit ihren Nennern, oder verhalten ſich **verkehrt**, wie ihre Nenner; weil der erſte Bruch zum zweyten, wie der Nenner des zweyten zum Nenner des erſten.

220. **Eine Größe wächſt, wie die andere wächſt**, will ſo viel ſagen, als, eine Größe wird das 2fache, 3fache oder nfache, ſo oft die andere das 2fache, 3fache oder nfache wird. So ſagt man die Waaren einerley

ley Art wachſen wie ihre Preiſe; weil man um 2mal, 3mal oder nmal mehr Geld auch 2mal, 3mal oder nmal mehr Waaren bekömmt.

Eine Größe wächſt, wie die andere abnimmt, heißt ſo viel, als, eine Größe wird das 2fache, 3fache, oder nfache, ſo oft die andere der zweyte, der dritte, oder der nte Theil wird. So ſagt man, die Zeit, in welcher eine gewiſſe Arbeit zu verrichten iſt, wächſt, wie die Anzahl Arbeiter abnimmt; weil man 2mal, 3mal oder nmal mehr Zeit braucht, ſobald man nur den zweyten, dritten oder nten Theil der Arbeiter dazu nimmt.

221. Wenn die Größen einer Art, wie die Größen einer andern Art wachſen, und a eine Größe der erſten Art, b aber ihre entſprechende der andern Art bedeutet; ſo wird auch na jede andere Größe der erſten Art, und nb die ihr entſprechende der zwoten Art bedeuten.

Es iſt aber $anb = nab$ oder
$a \times nb = na \times b$, alſo
$a : na = b : nb$.

Wenn daher die Größen einer Art wie die Größen einer andern Art wachſen; ſo verhält ſich die erſte Art Größen gerade, wie die zwote: oder jede zwo Größen der erſten Art ſtehen im geraden Verhältniſſe mit den zwo entſprechenden Größen der zwoten Art.

So weil die Preiſe der Waaren wie die Waaren wachſen; ſo iſt, wenn a Ellen b fl, und c Ellen x fl. koſten,

$$a : c = b : x$$

222. Wenn die Größen einer Art wachſen, wie die Größen einer andern Art abnehmen, und a eine Größe der

erſten Art, b aber die ihr entſprechende der andern Art bedeutet; ſo wird auch na jede andere Größe der erſten Art, und $\frac{b}{n}$ die ihr entſprechende der zwoten Art bedeuten.

$$\text{Es iſt aber } ab = \frac{nab}{n} \text{ oder}$$

$$a \times b = na \times \frac{b}{n} \text{ alſo}$$

$$a : na = \frac{b}{n} : b$$

Wenn daher die Größen einer Art wachſen, wie die Größen einer andern Art abnehmen; ſo verhält ſich die erſte Art Größen verkehrt, wie die zwote: oder jede zwo Größen der erſten Art ſtehen im verkehrten Verhältniſſe mit den zwo entſprechenden Größen der zwoten Art.

So weil die Zeit, in welcher eine gewiſſe Arbeit zu verrichten iſt, wächſt, wie die Anzahl der Arbeiter abnimmt; ſo iſt, wenn a Arbeiter in b Tagen, und c Arbeiter in x Tagen damit fertig werden,

$$a : c = x : b.$$

223. Wenn alſo eine Art Größen wächſt wie eine andere Art Größen wächſt oder abnimmt, und zwo Größen einer Art nebſt einer aus den zwo entſprechenden Größen der andern Art gegeben ſind; ſo läßt ſich allemal auch die andere aus dieſen finden: wenn man nach angeſtellter Unterſuchung, ob die Größen beeder Art im geraden oder verkehrten Verhältniſſe ſtehen, die vier Größen in eine Proportion ſetzet, und daraus das unbekannte Glied beſtimmet.

30 Ellen koſten $40\frac{1}{4}$ fl. Wieviel koſten 127 Ellen? x Gulden. Weil die Ellen wachſen, wie die Gulden; ſo verhalten ſich jene gerade wie dieſe; folglich iſt

$$30 : 127 = 40\tfrac{1}{4} : x \text{ oder}$$
$$120 : 127 = 161 : x, \text{ alſo}$$
$$x = \frac{127 \times 161}{120} = 170 \text{ fl. } 23\tfrac{1}{2} \text{ kr.}$$

100 fl. Kapital tragen jährlich 4 fl. Zins. Wie viel Zins trägt jährlich ein Kapital von 743627 fl.?

x fl. Zins. Weil die Zinſen wachſen, wie die Kapitale; ſo ſtehen jene im geraden Verhältniſſe mit dieſen; alſo iſt

$$100 : 743627 = 4 : x, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{743627 \times 4}{100} = \frac{2974508}{100} = 29745\,\frac{8}{100} =$$

$$29745 \text{ fl. } \frac{48}{10} \text{ kr.} = 29745 \text{ fl. } 4\,\frac{4}{5} \text{ kr.}$$

Ein Kapital trägt in 7 Jahr und 4 Monat 2874 fl. 40 kr. Zins. Innerhalb welcher Zeit wird daſſelbe 410 fl. 40 kr. Zins tragen?

Weil die Zinſen bey demſelben Kapitale wachſen, wie die Zeiten; ſo verhalten ſich jene gerade wie dieſe; alſo iſt

$$2874\,\frac{2}{3}\text{fl.} : 410\,\frac{2}{3}\text{fl.} = 7\,\frac{1}{3} \text{ Jahr} : x \text{ Jahr.}$$

Ein mittleres und ein äuſſeres durch 3 multiplicirt, giebt

$$
\begin{aligned}
8624 : 1232 &= 7\tfrac{1}{3} : x, \text{ .. mit 3 multiplicirt}\\
25872 : 1232 &= 22 : x, \text{ .. mit 4 dividirt}\\
6468 : 308 &= 22 : x, \text{ .. mit 4 dividirt}\\
1617 : 77 &= 22 : x, \text{ .. mit 7 dividirt}\\
231 : 11 &= 22 : x, \text{ .. mit 11 dividirt}\\
21 : 1 &= 22 : x, \text{ .. alſo iſt}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{22}{21} = 1\,\frac{1}{21} \text{ Jahr} = 1 \text{ Jahr } \frac{4}{7} \text{ Monat.}$$

Wie lange muß ich ein Kapital von 34567 fl. ſtehen laſſen, bis es ſo viel Zins trägt, als in 3 Jahr und 4 Monat 109750 fl. $13\frac{1}{2}$ kr. tragen?

x Jahr. Weil die Zeit wächſt, wie das Kapital abnimmt; ſo verhält ſich jene verkehrt wie dieſes; alſo iſt

$$3 \text{ J. } 4 \text{ M.} : x \text{ J.} = 34567 \text{ fl.} : 109750 \text{ fl. } 13\tfrac{1}{2} \text{ kr.}$$

$$
\begin{aligned}
3\tfrac{1}{3} \text{ J.} : x \text{ J.} &= 34567 \text{ fl.} : 109750\tfrac{9}{40} \text{ fl., .. durch 40 mult.}\\
3\tfrac{1}{3} : x &= 1382680 : 4390009, \text{ .. durch 3 mult.}\\
10 : x &= 4148040 : 4390009, \text{ .. durch 10 div.}\\
1 : x &= 414804 : 4390009, \text{ folglich}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{4390009}{414804} = 10 \text{ Jahr und 7 Monat.}$$

30 Arbeiter machen ein Werk innerhalb eines Jahres; nun ſoll es in 6 Wochen zu Ende kommen. Wie viel Arbeiter ſind zu dingen? x Arbeiter. Weil die Anzahl der Arbeiter wächſt, wie die Zeit abnimmt: ſo verhält ſich jene verkehrt wie dieſe; alſo iſt

$$30^{\text{Arb.}} : x^{\text{Arb.}} = 6^{\text{W.}} : 52^{\text{W.}}; \text{ folglich}$$

$$x = \frac{30 \times 52}{6} = 5 \times 52 = 260 \text{ Arbeiter}$$

50 Mann haben auf 6 Monat hinlängliche Lebensmittel. Wie lange werden die nämlichen Lebensmittel für 250 Mann hinreichen? x Monat. Weil die Monate abnehmen,

men, wie die Anzahl der Mann wächſt; ſo verhalten ſich jene verkehrt wie dieſe; alſo iſt

$$6^{Monat} : x^{Monat} = 250^{Mann} : 50^{Mann}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{6 \times 50}{250} = \frac{6 \times 5}{25} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5} \text{ Monat.}$$

223. Wenn die Größen einer Art wachſen, wie die Größen einer zwoten, und zugleich wie die Größen einer dritten Art; und a eine Größe der 1ten Art, b ihre entſprechende der 2ten Art und c ihre entſprechende der 3ten Art bedeuten: ſo wird a zu na anwachſen, ſobald b zu nb anwächſt, und na wieder zu qna werden, ſobald c zu qc wird; folglich wird den Größen nb der zwoten Art und qc der dritten Art die Größe qna der erſten Art entſprechen:

Es iſt aber $abcnq = abcnq$ oder
$a \times bcnq = qna \times bc$ alſo
$a : qna = bc : nbqc$ oder
$a : qna = (b : nb)\ (c : qc)$

Wenn alſo die Größen einer Art wachſen, wie jene einer zwoten Art, und zugleich wie jene einer dritten Art; ſo iſt das Verhältniß jeder zwo Größen der erſten Art aus dem geraden Verhältniſſe ihrer entſprechenden Größen der zwoten Art, und aus dem geraden Verhältniſſe ihrer entſprechenden Größen der dritten Art zuſammengeſetzt.

Wenn die Größen einer Art wachſen, wie die Größen einer zwoten Art, und zugleich abnehmen, wie die Größen einer dritten Art wachſen; und a eine Größe der erſten Art, b ihre entſprechende der zwoten Art, und c ih-

ihre entſprechende der dritten Art bedeuten: ſo wird a zu na anwachſen, ſobald b zu nb anwächſt, und na wieder zu $\frac{na}{q}$ werden, ſobald c zu qc wird; folglich wird den Größen nb der zwoten Art, und qc der dritten Art die Größe $\frac{na}{q}$ der erſten Art entſprechen.

Es iſt aber $abcn = \frac{abcnq}{q}$ oder

$$a \times bcn = \frac{na}{q} \times bcq, \text{ alſo}$$

$$a : \frac{na}{q} = bcq : bcn \text{ oder}$$

$$a : \frac{na}{q} = (b : bn)(cq : c)$$

Wenn alſo die Größen einer Art wachſen, wie jene einer zwoten Art wachſen, und zugleich wie jene einer dritten Art abnehmen: ſo iſt das Verhältniß jeder zwo Größen der erſten Art aus dem geraden Verhältniſſe ihrer entſprechenden Größen der zwoten Art und aus dem verkehrten Verhältniſſe ihrer entſprechenden Größen der dritten Art zuſammengeſetzt.

225. Es läßt ſich daher aus fünf von dieſen Größen allemal auch die ſechſte finden, wenn man erſtlich das zuſammengeſetzte unbekannte Verhältniß auf eine Seite des Gleichungszeichens, und die einfachen bekannten Verhältniſſe, nachdem ſie gerad oder verkehrt gefunden worden ſind, gerad oder verkehrt auf die andere

re Seite des Gleichungszeichens untereinander ſchreibt, ſodann aus dieſen das zuſammengeſetzte bekannte Verhältniß ſucht, und endlich die Proportion auflöſet.

4500 fl. Kapital geben in 5 Jahr 900 fl. Zins; wieviel geben 756800 fl. Kapital in 8 Jahr und 4 Monat?

Wenn 4500 fl. Kapit. in 5 Jahr 900 fl. Zins geben;	ſo geben	756800 fl. Kapital in 8 Jahr und 4 Mon. x fl. Zins.

Weil die Zinſen wachſen wie die Kapitale, und zugleich wie die Jahre, in welchen die Kapitale ausſtehen; ſo verhalten ſich die Zinſen gerad wie die Kapitale, und zugleich gerad wie die Jahre. Daher iſt

$$900^{3.} : x^{3.} = 4500^{fl.} : 756800^{fl.}$$
$$5^{J.} : 8\tfrac{1}{3}^{J.}$$

Die Brüche weggebracht und abgekürzt, giebt

$$\not{9}\not{0}\not{0} : x = \not{4}\not{5}\not{0}\not{0} : 7568\not{0}\not{0}$$
$$100 \qquad\qquad \not{9}$$
$$3\times\not{5} : \not{8}\frac{\not{1}}{\not{3}}, \not{2}\not{5}, 5, \text{ alſo}$$

$$100 : x = 3 : 7568$$
$$3x = 756800 \text{ und}$$
$$x = 252266\tfrac{2}{3} \text{ fl.}$$

4500 fl. Kapital tragen in 5 Jahr 900 fl. Zins: in wieviel Jahr werden 756800 fl. Kapital 252266⅔ fl. Zins tragen?

Wenn 4500 fl. Kapital in 5 Jahr 900 fl. Zins tragen;	ſo tragen	756800 fl. Kapital in x Jahr 252266⅔ fl. Zins.

 Weil

Weil die Jahre wachſen, wie die Zinſen wachſen, und wie die Kapitale abnehmen; ſo verhalten ſich die Jahre gerad, wie die Zinſen, und verkehrt, wie die Kapitale. Daher iſt

$$\begin{aligned} 5 : x = 756800 &: 4500 \\ 900 &: 252266\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Die Brüche weggebracht und abgekürzt, giebt

$$\begin{aligned} 5 : x = \cancel{756800} &: \cancel{4500},\ 5 \\ 3 \times \cancel{900} &: \cancel{252266}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{756800},\ \text{alſo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 : x &= 3 : 5 \\ 3x &= 25 \\ x &= 8\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

4500 fl. Kapital tragen in 5 Jahr 900 fl. Zins: wieviel fl. Kapital ſind anzulegen, daß ſie in $8\frac{1}{3}$ Jahr $252266\frac{2}{3}$ fl. Zins tragen?

Wenn 4500 fl. Kapital in 5 Jahr 900 fl. Zins tragen:	ſo tragen	x fl. Kapital in $8\frac{1}{3}$ Jahr $252266\frac{2}{3}$ fl. Zins.

Weil die Kapitale wachſen, wie die Zinſen wachſen, und zugleich wie die Jahre abnehmen; ſo verhalten ſich die Kapitale gerad wie die Zinſen, und verkehrt, wie die Jahre. Daher iſt

$$\begin{aligned} 4500 : x = 900 &: 252266\tfrac{2}{3} \\ 8\tfrac{1}{3} &: 5 \end{aligned}$$

Die Brüche weggebracht und abgekürzt, giebt

$$4500 : x = 900 \times 3 : 252266\frac{2}{3},\ 7568\not{0}\not{0}$$

$$9\not{0}\not{0}$$

$$100 \qquad 3,\ 25,\ 8\frac{x}{3} : 3 \times 3$$

$$100 : x = 1 : 7568$$
$$x = 756800$$

226. Wenn das Verhältniß a : b zuſammengeſeßt iſt uns dem Verhältniſſe c : d und dem Verhältniſſe m : n; oder iſt a : b = (c : d)(m : n); ſo iſt auch

$$c : d = \frac{a : b}{m : n}$$

$$c : d = (a : b)(n : m),\ \text{und}$$

$$m : n = \frac{a : b}{c : d}$$

$$m : n = (a : b)(d : c)$$

Wenn daher ein Verhältniß aus zweyen andern geraden Verhältniſſen zuſammengeſeßt iſt; ſo iſt auch jedes dieſer zwey leßtern aus dem geraden erſten, und aus dem verkehrten andern dieſer zwey leßtern zuſammengeſeßt.

So weil die Zinſen ſich verhalten gerad wie die Kapitale, und gerad, wie die Zeiten; ſo verhalten ſich auch die Kapitale gerad wie die Zinſen, und verkehrt, wie die Zeiten, und die Zeiten gerad wie die Zinſen, und verkehrt wie die Kapitale.

Bewegt ſich ein Körper 2, 3, oder 4mal geſchwinder; ſo durchläuft er in gleicher Zeit einen 2, 3,

oder

oder 4fachen Weg: und geht er 2, 3, oder 4mal länger fort; ſo legt er mit derſelben Geſchwindigkeit wieder einen 2, 3, oder 4fachen Weg zurücke. Es wächſt daher der Weg eines bewegten Körpers, wie die Geſchwindigkeit, mit welcher, und wie die Zeit, in welcher er ſich bewegt.

Es iſt alſo bey bewegten Körpern das Verhältniß der durchlaufenen Wege aus dem geraden Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten, und dem geraden Verhältniſſe der Zeiten zuſammengeſetzt; folglich iſt auch das Verhältniß der Geſchwindigkeiten aus dem geraden Verhältniſſe der Wege und dem verkehrten Verhältniſſe der Zeiten, und wieder das Verhältniß der Zeiten aus dem geraden Verhältniſſe der Wege, und dem verkehrten Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten zuſammengeſetzt.

Verhalten ſich ferner die Geſchwindigkeiten gerade wie die Zeiten; ſo iſt das Verhältniß der Geſchwindigkeiten gleich dem Verhältniſſe der Zeiten, alſo das Verhältniß der Wege aus dieſen zwo gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt; folglich verhalten ſich die Wege in dieſem Falle gerad wie die Quadraten der Zeiten, oder wie die Quadraten der Geſchwindigkeiten, und die Geſchwindigkeiten oder die Zeiten gerad wie die Quadratwurzeln der Wege.

Ein Körper macht mit einer Geſchwindigkeit wie 2 innerhalb 36 Minuten 3460 Klaftern Weges: wieviel Klaftern wird ein Körper mit einer Geſchwindigkeit wie 3 innerhalb einer Stunde und 6 Minuten durchlaufen?

Wenn der 1te Körper

3460 Klaftern mit der Geſchwindigkeit wie 2 in 36 Min. durchläuft,	ſo durchläuft der 2te	x Klaftern mit der Geſchwindigkeit wie 3 in 66 Minuten.

Und

Und weil die Wege ſich verhalten gerade, wie die Geſchwindigkeiten, und wie die Zeiten; ſo iſt

$$\begin{array}{l} 3460 : x = 2 : 3 \\ 1730 \quad 2, 6, 36 : 66, \quad 11 \\ 865 \\ \hline 865 : x = 1 : 11 \\ \qquad x = 865 \times 11 = 9515 \text{ Klaſtern.} \end{array}$$

Ein Körper durchläuſt mit der Geſchwindigkeit wie 2 in 36 Minuten 3460 Klaſtern, in wieviel Minuten wird er mit der Geſchwindigkeit wie 3, 9515 Klaſtern zurücklegen?

Er durchläuſt		
mit der Geſchwindigkeit wie 2 in 36 Minuten 3460 Klaſtern,	alſo	mit der Geſchwindigkeit wie 3 in x Minuten. 9515 Klaſtern.

Weil die Zeiten ſich verhalten gerade wie die Wege, und verkehrt wie die Geſchwindigkeiten; ſo iſt

$$\begin{array}{l} 36 : x = 3460 : 9515, \ 1903 \\ 12 \qquad 1730 \\ 6 \qquad\ 346 \\ \qquad\quad 173 \ 3 : \quad 2 \\ \hline 6 : x = 173 : 1903 \\ \qquad x = \frac{1903 \times 6}{173} = 66 \text{ Minuten.} \end{array}$$

Ein Körper durchläuſt mit der Geſchwindigkeit wie 2 in 36 Minuten 3460 Klaſtern: mit was für einer Geſchwindigkeit wird er in 66 Minuten 9515 Klaſtern durchlaufen?

Er

Er durchläuft

mit der Geſchwindigkeit wie 2 in 36 Minuten 3460 Klaftern,	alſo	mit der Geſchwindigkeit wie x in 66 Minuten 9515 Klaftern.

Weil die Geſchwindigkeiten ſich verhalten gerade wie die Wege, und verkehrt wie die Zeiten; ſo iſt

$2 : x = 3460 : 9515$ 1903
1 692
346 66 : 36, 6, 3
173, 11

$$1 : x = 173 \times 11 : 1903 \times 3$$

$$x = \frac{5709}{1903} = 3$$

Wenn ein Körper im Freyen ſich ſelbſt überlaſſen wird; ſo bewegt ihn ſeine Schwere gegen den Mittelpunkt der Erde, und er fällt. Dieſe Schwere wirkt beſtändig auf den Körper: verſetzet ſie ihn daher im erſten Augenblicke ſeines Falls in eine Geſchwindigkeit wie a; ſo wird ſie ihm in 2 gleichen Augenblicken die Geſchwindigkeit wie 2 a, in drey gleichen Augenblicken, die Geſchwindigkeit wie 3a, in 4 gleichen Augenblicken, die Geſchwindigkeit wie 4a mittheilen und ſo fort. Es wächſt alſo die Geſchwindigkeit, mit der ein Körper im Freyen fällt, den ganzen Fall über wie die Zeit, oder bey einem fallenden Körper verhalten ſich die Geſchwindigkeiten, wie die Zeiten; folglich die Wege, wie die Quadraten der Zeiten oder der Geſchwindigkeiten, und die Zeiten oder die Geſchwindigkeiten, wie die Quadratwurzeln der Wege.

Ein

Ein Körper fällt nach der Erfahrung in einer Secunde 15 Fuß herab: in wieviel Secunden wird er 2160 Fuß herunterfallen?

In x Secunden. Daher iſt

$$1 : x = \sqrt{15} : \sqrt{2160}$$

$$1 : xx = 15 : 2160$$

$$xx = \frac{2160}{15} = \frac{432}{3} = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12$$

Wie tief wird ein Körper in einer Stunde fallen?

Weil er in einer Secunde 15 Fuß fällt; ſo fällt er in 3600 Secunden x Fuß. Daher iſt

$$15 : x = 1^2 : 3600^2$$ oder

$$15 : x = 1 : 12960000$$

$$x = 12960000 \times 15$$

$$x = 194400000$$ Fuß oder

$$x = 194400000 = 8100$$ deutſche Meilen.

Ein Körper fällt vom Anfange in einer gewiſſen Zeit den Raum a durch; was für einen Raum wird er in jeder der darauf folgenden gleichen Zeiten durchfallen?

Weil er in der erſten Zeit den Raum a durchfällt, und die Räume ſich wie die Quadraten der Zeiten verhalten; ſo durchfällt er

in

in den 2 erſten Zeiten den Raum 4a
in den 3 erſten Zeiten den Raum 9a
in den 4 erſten Zeiten den Raum 16a
in den 5 erſten Zeiten den Raum 25a
in den 6 erſten Zeiten den Raum 36a
und in den n erſten Zeiten den Raum nna

alſo in der 2ten Zeit den Raum $4a - a = 3a$
in der 3ten Zeit den Raum $9a - 4a = 5a$
in der 4ten Zeit den Raum $16a - 9a = 7a$
in der 5ten Zeit den Raum $25a - 16a = 9a$
in der 6ten Zeit den Raum $36a - 25a = 11a$
und in der nten Zeit den Raum $nna - (n - 1)^2 a$
$= nna - (nn - 2n + 1)a = nna - nna + 2na - a$
$= 2na - a = (2n - 1)a$.

Folglich erhält man den Raum, den ein Körper in jeder der aufeinander folgenden gleichen Zeiten durchfällt, wenn man den Raum der erſten Zeit mit der doppelten Anzahl der Zeiten weniger 1 multiplicirt. Wenn z. B. ein Körper in der erſten Secunde 15 Fuß fällt; ſo wird er in der 10ten Secunde $(20 - 1) \times 15 = 19 \times 15 = 285$ Fuß fallen.

227. Wenn die Größen einer Art wachſen, wie die Größen einer zwoten, dritten, vierten, fünften, ſechſten Art wachſen oder abnehmen, und folglich im zuſammengeſetzten Verhältniſſe aus den geraden oder verkehrten Verhältniſſen der zwo entſprechenden Größen jeder Art ſtehen; ſo kann wieder jede Unbekannte gefunden werden, wenn man das unbekannte zuſammengeſetzte Verhältniß, und die bekannten einfachen Verhältniſſe, jede: nachdem ſie gerad oder verkehrt gefunden wird, gerad oder verkehrt wie zuvor hinſchreibt, das zuſammengeſetzte bekannte Verhältniß ſuchet, und endlich die Proportion auflöſet.

300 Arbeiter verfertigen in 6 Monat, da ſie jeden Monat 20 Tag, und jeden Tag 8 Stund arbeiten, eine Mauer, die 10 Fuß hoch, 4 Schuh dick, und 8940 Klaftern lang iſt: wie lange werden 800 Arbeiter an einer Mauer zu verfertigen haben, welche 14 Schuh hoch, 5 Schuh dick und 10860 Klaftern lang iſt, wenn ſie monatlich 24 Tage und jeden Tag 9 Stund fortarbeiten?

Wenn 300 Arbeiter an einer Mauer, die 10 Schuh hoch 4 Schuh dick und 8940 Kl. lang iſt, 6 Monat, in jedem Mon. 20 Tag in jedem Tage 8 Stund arbeiten;	ſo brauchen	800 Arbeiter zu einer Mauer, welche 14 Schuh hoch 5 Schuh dick und 10860 Kl. lang iſt, x Monat, in jedem Mon. 24 Tag, in jedem Tage 9 Stund.

Nun weil die Monate wachſen, wie die Arbeiter, die Tage in jedem Monate, und die Stunden in jedem Tage abnehmen, und wie die Höhe, die Breite und die Länge der Mauer wachſen; ſo iſt

$\cancel{6} : x =$	$\cancel{8}\cancel{0}\cancel{0}$	:	$\cancel{3}\cancel{0}\cancel{0}$
$\cancel{2}$	$\cancel{2},\ \cancel{4},\ \cancel{8},\ \cancel{24}$	:	$\cancel{2}\cancel{0}$
1	$3,\ \cancel{9}$	:	8
	$\cancel{1}\cancel{0}$	:	$\cancel{14},\ 7$
	4	:	5
	$149,\ \cancel{447},\ \cancel{894}\cancel{0}$	:	$\cancel{1086}\cancel{0}\ \cancel{543},\ 181$

$$1 : x = 149 \times 12 : 181 \times 35$$

$$x = \frac{181 \times 35}{149 \times 12} = 3 \text{ Monat } 13\frac{15}{447} \text{ Tag.}$$

Geſetzt, es wäre die Anzahl der 800 Arbeiter zu ſuchen; ſo kömmt, weil die Arbeiter wachſen, wie die Höhe, Breite und Länge der Mauer wachſen, und wie die Monate, Tage und Stunde abnehmen, die Rechnung, wie folgt, zu ſtehen.

$$\begin{array}{rcl}
300 : x = 2,\ 10 & : & 14,\ 7 \\
100 \qquad\qquad 4 & : & 5 \\
149,\ 298,\ 8940 & : & 10860,\ 362,\ 181 \\
7,\ \dfrac{181 \times 35}{149 \times 12} & : & 6 \times 149 \times 12,\ 2,\ 4 \\
3,\quad 24 & : & 20,\quad 5 \\
3,\ 9 & : & 8 \\
\hline
100 : x = \qquad 1 & : & 8 \\
x = 800 & &
\end{array}$$

Setzen wir noch, es wäre die Höhe der 14 Schuh zu ſuchen; ſo iſt, weil die Höhe wächſt, wie die Arbeiter, die Monate, die Tage und die Stunden wachſen, und wie die Breite und Länge abnehmen,

$$\begin{array}{rcl}
10 : x = 300 & : & 800 \\
1 \qquad 2,\ 149 \times 12 \times 6 & : & \dfrac{181 \times 35}{149 \times 12},\ 7 \\
10,\ 20 & : & 24,\ 2 \\
8 & : & 9,\ 3 \\
5 & : & 4,\ 2 \\
181,\ 10860 & : & 8940,\ 149 \\
\hline
1 : x = \qquad 1 & : & 14 \\
x = 14 & &
\end{array}$$

Eine Beſatzung von 800 Mann iſt mit Zwiebacke auf 3 Monate noch ſowohl verſehen, daß alle 5 Tag

12

12 Pfund auf jeden Mann kommen. Nun wird dieſe Beſatzung mit 400 Mann verſtärket : wieviel Pfunde können alle 7 Tag jedem Manne gegeben werden, daß man damit auf $2\frac{1}{2}$ Monat auskomme?

x Pfund.

Weil die Portionen wachſen, wie die Zahlen wachſen, welche die Tage der auszutheilenden Portionen beſtimmen, und wie die Mannſchaft und die Monate abnehmen; ſo iſt

$$12 : x = 5 : 7$$

$$5,\ \cancel{2}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} : \cancel{3} \times 2$$

$$\cancel{3},\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0} : 8\cancel{0}\cancel{0},\ 2$$

$$12 : x = 25 : 28$$

$$x = \frac{28 \times 12}{25} = 13\frac{11}{25}.$$

228. Weil jedes Verhältniß aus allen mittlern Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt; ſo kann das Verhältniß zwoer Münzſorten allemal nach voriger Methode gefunden werden, ſobald die mittlern Verhältniſſe gegeben ſind.

Einer überſchickt von Petersburg 1000 Rubel nach Berlin, und will wiſſen, wieviel ſolche in der Berliner-Bank Dukaten betragen; da 1 Rubel $47\frac{1}{2}$ holländiſche Stüber, 20 holländiſche Stüber 1 holländiſchen Gulden, $2\frac{1}{2}$ holländiſche Gulden 1 holländiſchen Species-Thaler, 100 holländiſche Species-Thaler 142 Berliner Thaler, 3 Berliner Thaler 1 Dukaten in

Berlin ausmachen, und der Wechsler für 105 Dukaten nur 100 Dukaten bezahlt?

Hier iſt das Verhältniß der Rubel in Petersburg zu den Dukaten in der Berliner-Bank aus den mittlern Verhältniſſen der Rubel zu den holländiſchen Stübern, der holländiſchen Stüber zu den holländiſchen Gulden, der holländiſchen Gulden zu den holländiſchen Species-Thalern, der holländiſchen Species-Thaler zu den Berliner Thalern, der Berliner Thaler zu den Dukaten in Berlin, und der Dukaten in Berlin zu den Dukaten in der Berliner-Bank zuſammengeſetzt;

daher iſt

$$\begin{array}{llcl}
\cancel{1000}^{\text{R.}} : x^{\text{D.}} = & \cancel{2},\ \cancel{1}^{\text{Rub.}} & : & \cancel{47}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}^{\text{Stüb.}} \times \cancel{95},\ 19 \\
\cancel{100} & \cancel{10},\ \cancel{20}^{\text{Stüb.}} & : & \cancel{1}^{\text{fl.}} \\
20 & \cancel{5},\ \cancel{2}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}^{\text{fl.}} & : & \cancel{1}^{\text{Sp.Th.}} \times \cancel{2} \\
 & \cancel{100}^{\text{Sp.Th.}} & : & \cancel{142}^{\text{Berl.Th.}},\ 71 \\
 & 3^{\text{Berl.Th.}} & : & \cancel{1}^{\text{Berl.D.}} \\
 & 21,\ \cancel{105}^{\text{Berl.D.}} & : & \cancel{100}^{\text{D. in der Bank.}} \\
\hline
20 : x = & 3 \times 21 & : & 19 \times 71
\end{array}$$

$$x = \frac{19 \times 71 \times 20}{3 \times 21} = 428\frac{16}{63} \text{ Duk. in der Bank.}$$

Wieviel betragen 3460 Würfe Siebner in Souverains?

Da 1 Wurf 5 Siebner, 3 Siebner 7 Groſchen, 20 Groſchen 1 Gulden, $12\frac{2}{3}$ Gulden 1 Souverain ausmachen; ſo iſt

$$
\begin{array}{llllll}
3460^{\text{Würf.}} & : x^{\text{Souv.}} & = & 1 & : & 3 \\
865 & & & 3 & : & 7 \\
 & & & 4,\ 20 & : & x \\
 & & & 38,\ 12\frac{2}{3} & : & 1 \times 3 \\
\hline
865 & : x & = & 38 & : & 7
\end{array}
$$

$$x = \frac{865 \times 7}{38} = 159\frac{13}{38}\ \text{Souv.}$$

Wenn 50 Dukaten in Wien 101 Rth. in der Bank, 1 Rth. aber 119 polniſche Groſchen, und 30 polniſche Groſchen 1 polniſchen Gulden ausmachen: wieviel betragen 1000 Dukaten polniſche Gulden?

x polniſche Gulden. Daher iſt

$$
\begin{array}{llllll}
1000 & : x & = & 50 & : & 101 \\
20 & & & x & : & 119 \\
 & & & 30 & : & x \\
\hline
2 & : x & = & 3 & : & 101 \times 119
\end{array}
$$

$$x = \frac{101 \times 119 \times 2}{3} = 8012\tfrac{2}{3}\ \text{poln. Gulden.}$$

Leipzig läßt von Amſterdam Dukaten kommen. In Holland gelten 5 Dukaten 26 Gulden, und für 105 werden in der Bank nur 100 gezahlt: ferner gelten 100 holländiſche Rth. in Leipzig 133¼ Rth.: endlich machen 2 holländiſche Rth. 5 holländiſche Gulden aus. Wieviel ſind in Leipzig für 1000 Dukaten Rthlr. zu bezahlen?

x Rthaler. Daher iſt

$$\begin{array}{lcl}
\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}^{D.} & : & x^{R.Th.} = \cancel{5}^{D.} : 26^{Holl.\,fl.} \\
\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0} & & \cancel{5}^{Holl.\,fl.} : 2^{Holl.\,R.Th.} \\
\cancel{4}\cancel{0} & & \qquad\qquad \cancel{1}^{Leipz.\,Rth.} \\
8 & & \cancel{4},\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}^{Holl.\,Rth.} : \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\frac{\cancel{1}}{4} \times 533 \\
2 & & 21,\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{5}^{Leipz.\,Rth.} : \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}^{Rth.\ in\ der\ Bank.} \\
\hline
 & & 2 : x = 21 : 533 \times 26 \times 2
\end{array}$$

$$x = \frac{533 \times 26 \times 4}{21} = 2639\frac{13}{21}\ ^{Rth.}$$

229. Wenn mehrere zuſammen in eine Handlungs-Geſellſchaft treten; ſo wächſt der Gewinn eines jeden, wie die Einlage und zugleich wie die Zeit, in welcher er ſein Geld bey der Geſellſchaft läßt. Es ſtehen alſo die Gewinnſte im zuſammengeſetzten Verhältniſſe aus den geraden Verhältniſſen der Einlagen und der Zeiten. Wenn alſo ein Geſell mit a fl. in c Monat x fl., und der andere mit b fl. in d Monat y fl. gewinnt; ſo iſt

$$\begin{array}{l}
x : y = a^{fl.} : b^{fl.} \\
\qquad\quad c^{M.} : d^{M.} \\
\hline
x : y = ac : bd \text{ alſo auch} \\
x + y : x = ac + bd : ac \text{ und} \\
x + y : y = ac + bd : bd\text{; oder} \\
ac + bd : x + y = ac : x \text{ und} \\
ac + bd : x + y = bd : y
\end{array}$$

Wenn man daher jede Einlage mit ihrer Zeit multiplicirt; ſo verhält ſich die Summe dieſer Producte zu dem allgemeinen Gewinn, wie jedes Product zu dem ihm entſprechenden Gewinn.

Die-

Dieſes iſt die ſo genannte Geſellſchaftsregel. Wir wollen ſie auf folgende Beyſpiele anwenden. Zween treten in eine Geſellſchaft: der 1te giebt 500 fl. auf 6 Monat, und der 2te 9000 fl. auf 2 Monat; und gewinnen 1200 fl. Wieviel kömmt jedem von dieſem Gewinn zu? der 1te gewinne x fl. und der 2te y fl.; ſo iſt

$$500 \times 6 = 3000$$
$$9000 \times 2 = 18000$$
$$3000 + 18000 = 21000, \text{ alſo}$$

1tens
$$21000 : 1200 = 3000 : x$$
$$210 : 12 = 3000 : x$$
$$70 : 4 = 3000 : x$$
$$7 : 4 = 300 : x$$
$$x = \frac{1200}{7} = 171\frac{3}{7} \text{ fl. und}$$

2tens
$$21000 : 1200 = 18000 : y$$
$$21 : 1200 = 18 : y$$
$$7 : 400 = 18 : y$$
$$y = \frac{7200}{7} = 1028\frac{4}{7} \text{ fl.}$$

Drey legen in eine Geſellſchaft zuſammen:
der 1te 1600 fl. auf 10 Monat,
der 2te 3400 fl. auf 8 Monat,
der 3te 700 fl. auf 14 Monat;
und gewinnen insgeſamt 7800 fl. Wie viel gewinnt jeder? Der 1te x, der 2te y, und der 3te z fl.

Nun iſt
$$1600 \times 10 = 16000$$
$$3400 \times 8 = 27200$$
$$700 \times 14 = 9800, \text{ und}$$
$$16000 + 27200 + 9800 = 53000; \text{ alſo}$$

1tens
$$53000 : 7800 = 16000 : x$$
$$53 : 7800 = 16 : x$$
$$x = \frac{7800 \times 16}{53} = 2354 \frac{38}{53} \text{ fl.}$$

2tens
$$53000 : 7800 = 27200 : y$$
$$530 : 7800 = 272 : y$$
$$53 : 780 = 272 : y$$
$$y = \frac{780 \times 272}{53} = 4003 \frac{1}{53} \text{ fl. und}$$

3tens
$$53000 : 7800 = 9800 : z$$
$$530 : 7800 = 98 : z$$
$$53 : 780 = 98 : z$$
$$z = \frac{780 \times 98}{53} = 1442 \frac{14}{53} \text{ fl.}$$

Die Meßkunſt.

I.

Man hat bisher die Größen ohne Rückſicht auf den Zuſammenhang ihrer Theile betrachtet: Größen ſo betrachtet heiſſen **abgeſonderte Größen**, Zahlen, und machen den Gegenſtand der Rechenkunſt aus.

Nun wird man von den Größen handeln, deren Theile ſo miteinander verbunden ſind, daß des einen End allemal auch der Anfang des andern Theiles iſt. Dieſe Größen werden **ſtätige Größen** genennt, und machen den Gegenſtand der Meßkunſt aus.

Dieſe zwo Wiſſenſchaften, **abgeſonderter** und **ſtätiger Größen** begreifen die ganze **reine Mathematik**, oder die Wiſſenſchaft der Größen überhaupt.

2. Die ſtätigen Größen ſind dreyerley, **Körper**, **Flächen**, und **Linien**, denen man noch den **Punkt** beyfüget. Körper ſind Größen, welche lang, breit und tief, Flächen, welche nur lang und breit, und Linien, welche nur lang ſind, der Punkt endlich hat weder Länge, Breite, noch Tiefe.

Die erſte Figur ſtellet einen Körper vor, deſſen Länge a b, Breite a c und Tiefe a f iſt. Will man dieſen Körper ohne ſeine Tiefe betrachten; ſo betrachtet man die

Fläche a c d b, und läßt man von dieſer auch die Breite weg, ſo bleibt noch die Linie a b, welche endlich in einen Punkt a verwandelt wird, ſo bald man ſie ohne Länge betrachtet.

Länge, Breite, Tiefe, ſind gleichvielgeltende Ausdrücke, welche den gemeinſchaftlichen Begrif einer Ausdehnung haben, doch mit dem Unterſcheide, daß die erſte Ausdehnung eines Körpers Länge, die andere Breite und die dritte Tiefe, die zwo Ausdehnungen einer Fläche Länge und Breite, und die Ausdehnung der Linie allzeit Länge genennt wird.

3. Ein Punkt hat keine Länge, ſonſt wäre er eine Linie. Die Länge eines jeden Punktes iſt alſo wirklich gleich 0; folglich iſt auch die Länge von ſo viel Punkten, als man will, gleich 0. Eben dieſes gilt von der Breite einer und mehrerer Linien und von der Tiefe einer und mehrerer Flächen. Leget man nun Punkte an Punkte, Linien neben Linien, und Flächen auf Flächen ſo hin, daß ſie ſich durchaus berühren; ſo machen dieſe Punkte nur einen und denſelben Punkt, dieſe Linien nur eine und dieſelbe Linie, und dieſe Flächen nur eine und dieſelbe Fläche aus.

Der Punkt kann alſo kein Theil einer Linie, die Linie kein Theil einer Fläche und die Fläche kein Theil eines Körpers ſeyn, ſondern die Theile einer Linie ſind wieder Linien, die Theile einer Fläche wieder Flächen und die Theile eines Körpers wieder Körper.

F. 1. 4. Bewegt ſich ein Punkt von einem Orte a bis in einen andern b; ſo wird, weil der Punkt ſelbſt keine Ausdehnung hat, auch der Weg, den er durchläuft, keine andere Ausdehnung haben, als jene, welche die Bewegung des Punktes hervorbringt, alſo eine Linie ſeyn. Bewegt ſich aber eine Linie a b anders, als nach ihrer Richtung z. B. bis in c d; ſo wird der Weg, den ſie durchläuft, zwo Ausdehnungen haben, die, welche ſchon die Linie hat,

und

und jene, welche die Bewegung derſelben erzeugt, alſo eine Fläche ſeyn. Bewegt ſich endlich eine Fläche a c b d anders, als nach ihrer Lage z. B. bis in f e h g; ſo wird ihre Bewegung wieder eine neue Ausdehnung hervorbringen, alſo der von ihr durchlaufene Raum ein Körper ſeyn.

Die Linie wird alſo durch die Bewegung eines Punktes, die Fläche durch die Bewegung einer Linie und der Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeugt.

5. Wo immer ein Punkt ſich zu bewegen anfängt oder aufhört, eben da fängt auch die Linie an oder hört auf.

Die Ende einer Linie ſind alſo Punkte, und aus ähnlichem Grunde, die Ende einer Fläche Linien, und die Ende eines Körpers Flächen.

Weil der Punkt, wo man immer will, ſich zu bewegen aufhören kann; ſo giebt es überall in einer Linie Punkte, und aus ähnlichem Grunde in einer Fläche Linien und in einem Körper Flächen.

Weil das End des einen Theiles einer ſtätigen Größe zugleich auch der Anfang des andern Theiles iſt; ſo haben jede zween auf einander folgenden Theile der Linie einen Punkt, jede zween der Fläche eine Linie und jede zween des Körpers eine Fläche gemein.

6. Der Begriff der **geraden Linie** iſt einfach, und läßt ſich durch keine Beſchreibung deutlicher geben, als er ſchon an ſich ſelbſt iſt. Ihre Haupteigenſchaften ſind: **daß ſie der kürzeſte Weg zwiſchen ihren Endepunkten iſt,** und **daß ihre Lage durch jede zween Punkte derſelben beſtimmet wird,** oder **daß alle geraden Linien, welche zween Punkte gemein haben, nur eine und dieſelbe gerade Linie ausmachen.**

Eine **krumme Linie** iſt jene, worinn kein Theil, der gerad wäre, anzutreffen iſt.

Iſt eine Fläche ſo beſchaffen, daß jede gerade Linie, welche durch was immer für zween Punkte derſelben geht, allemal alle Punkte mit ebenderſelben gemein hat; ſo heißt ſie eine **ebene Fläche**, oder auch nur eine **Ebene.**

Eine **krumme** Fläche aber iſt jene, worinn kein Theil, der eben wäre, anzugeben iſt.

Alles, was wir verrichten, geſchieht, ſo lang wir nichts erinnern, in einer und derſelben Ebene.

F. 3. 7. Die Oeffnung zwoer geraden Linien, a c und b c, welche in einem Punkte c zuſammenlaufen, heißt **Winkel.** Die Geraden a c und b c werden deſſen **Schenkel**, und der beeden Schenkeln gemeine Punkt c deſſen **Scheitel** genennt.

Iſt der Scheitel mehrern Winkeln gemein; ſo muß man, um einen auszudrücken, alle drey Buchſtaben, und zwar jenen beym Scheitel in der Mitte ausſprechen, und ſagen: **der Winkel** a c b, oder **der Winkel** b c a; ſonſt iſt es hinlänglich, wenn man nur den Buchſtaben beym Scheitel nennt, und ſagt: **der Winkel** c.

Die Verlängerung der Schenkel verändert ihre Oeffnung beym Scheitel nicht; daher wird auch ein Winkel durch das Verlängern oder Verkürzen ſeiner Schenkel weder größer noch kleiner: ſondern ein Winkel wird größer, wenn ſich ſeine Schenkel mehr öfnen, und kleiner, wenn ſich dieſe mehr ſchließen.

F. 4. 8. Drehet ſich eine gerade Linie a c um einen unbeweglichen Punkt c, bis ſie wieder in ihre vorige Lage kömmt; ſo beſchreibt der Punkt a eine krumme Linie a b d e a, deren Punkte a, b, d, e, &c. gleichweit von c abſtehen, und die gerade Linie a c eine Ebene, welche in die krumme Linie eingeſchloſſen iſt. Dieſe Ebene heißt **Kreis**, der Punkt c deſſen **Mittelpunkt**, und die Krümme a b d e a deſſen **Umfang**. Jeder Theil a b des Umfanges wird **Bogen**, jede Gerade a b zwiſchen zwey Punkten des Umfanges, **Sehne**, jede Sehne a d, wel-

che durch den Mittelpunkt geht, **Durchmeſſer**, jede Gerade a c, welche vom Mittelpunkte bis an den Umfang geht, **Halbmeſſer**, jeder Theil a c b des Kreiſes, welcher zwiſchen zween Halbmeſſern und einem Bogen begriffen iſt, **Ausſchnitt**, und jeder Theil des Kreiſes, welcher zwiſchen einer Sehne a b und einem Bogen a b enthalten iſt, **Abſchnitt** genennt.

Weil alle Punkte des Umfanges gleichweit vom Mittelpunkte abſtehen; ſo ſind in jedem Kreiſe alle Halbmeſſer gleich: und weil ein Durchmeſſer a d allemal die Summe zweener Halbmeſſer a c und c d iſt; ſo ſind auch alle Durchmeſſer gleich.

9. Die Striche, welche man mit der Feder auf dem Papiere zieht, ſind keine Linien, ſondern nur Zeichen der Linien. Unerachtet deſſen nimmt man doch an, und muß es auch annehmen, wenn man je von den Regeln der Meßkunſt einen Gebrauch machen will, daß **man 1tens durch jede zween gegebenen Punkte eine gerade Linie ziehen, und 2tens aus jedem gegebenen Punkte mit einem gegebenen Halbmeſſer einen Kreis beſchreiben kann.**

Das Erſte geſchieht, wenn man ein Lineal an die gegebenen Punkte a und b anlegt, und ſodann längſt dieſem mit einer Reißfeder die Gerade a b zieht, und das Zweyte, wenn man mit den Spitzen des Zirkels den gegebenen Halbmeſſer faſſet, ſodann eine Spitze des Zirkels in den gegebenen Punkt c einſetzet und endlich mit der andern Spitze den Umfang a b d e a zeichnet. F. F.

Dieſe zwo Zeichnungen werden darum als richtig angenommen, weil ſie einfacher ſind als jede andere, und man folglich weniger dabey fehlet, als bey welchen mehr zuſammengeſetzte Inſtrumenten vonnöthen ſind.

Anwendung.

10. Auf dem Felde bezeichnet man die Punkte, nachdem man ſie nur in der Nähe oder von Ferne entdecken

ſoll, mit eiſernen Nägeln, hölzernen Pflöcken, Stäben oder hohen Stangen, welche man bleyrecht in die Erde ſteckt, und an deren Spitze Stroh oder ſonſt was in der Ferne ſichtbares anbindet.

F. 13. 11. Wenn zween Punkte a und b einer geraden Linie gegeben ſind; ſo findet man einen dritten d, außer a und b, wenn man den Stab d ſo einſtecket, daß der Stab b, den Stab d dem Auge in a, oder den Stab a dem Auge in d verdecket, und zwiſchen a und b, wenn man den Stab d ſo einſtecket, daß der Stab d den Stab b dem Auge in a oder den Stab a dem Auge in b verdecket.

Im erſten Falle kann derjenige, welcher den Stab d einſtecket, ſich ſelbſt nach a und b richten, im 2ten Falle aber muß er ſich von einem andern richten laſſen, außer er wolle vorläufig n nach a und b, und ſodann d nach b und n beſtimmen.

F. 14. 12. Wenn zween Punkte a und b einer Geraden und zween Punkte c und d einer andern Geraden gegeben ſind; ſo findet man ihren Durchſchnitt e, wenn man ſich in einen Punkt q der Geraden c d ſtellet, und ſodann in dieſer Geraden c d gegen der Geraden a b ſolange fortgeht, bis man endlich in den Punkt e kömmt, der beeden Geraden gemein iſt.

F. 14 Fällt der Durchſchnitt e außer den gegebenen Punkten; ſo kann derjenige, welcher den Stab e einſtecket, ſich ſelbſt
F. 15. nach c und d, und nach a und b richten; fällt aber der Durchſchnitt zwiſchen a und b; ſo muß er ſich von einem aus a nach b richten laſſen, oder vorläufig einen Punkt n ſuchen, und ſich nach c und d, und nach n und a rich-
F. 16. ten; fällt endlich der Durchſchnitt e zwiſchen a und b, und zwiſchen c und d; ſo muß er ſich von einem andern aus c nach d, und wieder von einem andern aus a nach b richten laſſen, oder vorläufig n nach a und b, und m nach c und d beſtimmen, und ſodann ſich ſelbſt nach m und c, und nach n und a richten.

F. 17. 13. Wenn zwiſchen zween unzugängigen Punkten z. B. zwiſchen den Spitzen zweener Thürme a und b,

Punk-

Punkte in der Geraden a b zu beſtimmen ſind, und zween ſtellen ſich in c und d nach einer geraden Linie a c d; ſo iſt es ausgemacht, daß der Thurm b auch in der Geraden a c d liegt, ſo bald derjenige, welcher in d iſt, den Thurm b dem Auge in c verdeckt. Gehen alſo c und d, ſo bald der in c den Thurm b neben dem in d vorbey ſieht, gegen der Geraden a b ſo fort, daß der in d ſich unterwegs beſtändig mit c und a in einer geraden Linie hält; ſo werden c und d in der Geraden a b ſeyn, ſo bald d den Thurm b dem Auge in c verdeckt. Denn in dieſem Falle haben die zwo Geraden a c d und c d b zween Punkte c und d gemein, alſo machen ſie nur eine und dieſelbe Gerade aus.

Der in d hat dabey gar nichts zu beobachten, als daß er ſich in allen Fällen nach c und a richtet, und der in c wieder nichts anders, als daß er ſich der Geraden a b nähert, ſo oft er den Thurm b neben d vorbey entdecket.

Sind die Punkte in der Geraden a b genau zu beſtimmen, und c und d der Geraden a b ſchon nahe gekommen; ſo können ſie ihre Stäbe einſtecken, und c den ſeinigen der Geraden a b ſo lang nähern, und d den ſeinigen nach c und a richten, bis endlich, wenn d gerichtet iſt, c, d und b in einer geraden Linie eintreffen.

Sind die Punkte in der Geraden a b nur durch Menſchen oder Pferde zu beſtimmen; ſo kann c anfänglich ſo ſtark gehen oder reiten, als nur d nachkommen, und beynahe die gerade Linie a c d halten kann, wenn nur c alsdann langſamer vorrückt, da es den Thurm b einmal ſehr nahe vorwärts d vorbey entdecket; ſonſt könnte es geſchehen, daß ſie die Gerade a b überrennten, in welchem Falle c den Thurm b rückwärts d vorbey ſehen würde, und folglich wieder zurück treten müßte.

14. **Meſſen** heißt nichts anders, als ſuchen wie oft eine willkürlich angenommene Größe, welche man **Maß** nennet, in einer andern, die man meſſen ſoll, enthalten iſt.

Das Maß muß alſo mehrmal genommen der gemeſſenen Größe gleich werden, und daher dieſe und jenes von einer und derſelben Natur ſeyn. So können Linien nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen und Körper nur durch Körper gemeſſen werden.

Die angenommenen Maße der Linien ſind Klafter, Schuhe, Zoll, Linien und Punkte. Die Größe einer Klafter iſt in verſchiedenen Ländern meiſtens auch verſchieden. So iſt die Fortifikationsklafter größer als die gemeine Wienerklafter. Unterdeſſen iſt aller Orte ein Schuh der ſechſte Theil einer Klafter, ein Zoll der zwölfte Theil eines Schuhes, die Linie der zwölfte Theil eines Zolles, und der Punkt der zwölfte Theil einer Linie.

F. 18. Wenn in einer Ebene auf dem Felde eine gerade Linie a b zu meſſen iſt; ſo bedienet man ſich insgemein der Meßkette nebſt 10 eiſernen Nägeln. Dieſe Meßkette iſt vom ſtarken Eiſendrate verfertiget, und in 10 Klafter, und jede Klafter in 6 Geleiche jedes von einem Schuh Länge eingetheilt. Die Klaftern werden durch größere und die Geleiche durch kleinere Ringe zuſammen gehänget.

F. 18. Da nun einer das eine End der Kette in a feſt anhält, ſo legt ein anderer das andere End dieſer wohl angeſtreckten Kette, indem er von a nach b gerichtet wird, in einem Punkte c der Geraden a b nieder, ſtecket in c einen von den 10 Nägeln ein, und zieht ſodann die Kette gegen b weiter, bis das andere End derſelben zu dem Nagel c kömmt, woran das letztere End der Kette wieder feſt gehalten wird, bis der 2te Nagel d ſo wie der 1te c in der Geraden a b eingeſtecket iſt; eben ſo wird der 3te Nagel e durch den 2ten d, der 4te f durch den 3ten e und ſofort beſtimmt. Der letzte zieht jeden Nagel aus, ſo bald der folgende eingeſtecket iſt, und ſo oft er alle 10 in die Hände bekömmt, ſo merket er 100 Klafter, und giebt ſie an den erſten wieder ab.

F. 19. Zweytens bedienet man ſich auch zwoer 12 Schuh langen Stangen, welche in Schuh und Zoll eingetheilet ſind. Man leget die erſte auf die Linie von a gegen b, und

und hält ſie feſt, bis die zwote an dieſe gegen b angeſtoſſen auch in der Linie liegt; ſodann hält man dieſe feſt, und ſtößt die 1te gegen b wieder an die 2te, und ſofort bis zum Ende.

Jede Stange wird, ſo oft ſie von der Erde aufgehoben wird, durch Reißbley mit einem Striche bezeichnet, damit man am Ende die Anzahl der Klaftern deſto verläßiger zuſammen zählen kann.

Stecket man vorläufig beynahe von 50 zu 50 Klaftern oder von 125 zu 125 Schritten in der Geraden Stäbe ein, und ſpannet nacheinander von einem Stabe bis zum folgenden eine Schnur an; ſo wird man deſto leichter längſt dieſer Schnur fortmeſſen können.

Fortſetzung der Theorie.

15. Läßt ſich eine Gerade c d auf eine andere Gerade F. 2. a b ſo hinlegen, daß der Punkt c mit a, und d mit b übereinkömmt; ſo ſind dieſe Geraden gleich. Und ſind zwo Geraden a b und c d gleich; ſo können ſie auch ſo aufeinander geleget werden, daß ihre Endepunkte, und alle ihre Zwiſchenpunkte miteinander übereinſtimmen.

Kann der Winkel d e f ſo auf den Winkel a c b hin- F. 3. geleget werden, daß der Scheitel e mit c, der Schenkel e f mit c b, und der Schenkel e d mit c a übereinkömmt; ſo ſind dieſe Winkel gleich. Und ſind zween Winkel a c b, und d e f gleich; ſo können ſie auch ſo aufeinander geleget werden, daß der Scheitel und die Schenkel des einen mit dem Scheitel und den Schenkeln des andern übereinſtimmen.

Größen decken ſich, will ſoviel ſagen, als: Größen können ſo aufeinander geleget werden, daß ihre Gränzen, und alles was zwiſchen ihren Gränzen iſt, miteinander übereinkömmt.

Alle Größen, welche ſich decken, ſind alſo gleich: und gerade Linien und Winkel, welche gleich ſind, decken ſich.

16. Drehet man den Theil a b d des Kreiſes um den F. 4. unbeweglichen Durchmeſſer a d; ſo werden alle Punkte b des Bogens a b d auf die Punkte e des Bogens a e d fal-

 len,

len, weil jene ebenſoweit als dieſe von dem Mittelpunkte c abſtehen. Alſo muß der Theil a b d den Theil a e d decken, und ihm gleich ſeyn.

Jeder Durchmeſſer theilet alſo den Kreis in zween gleiche Theile: und der Bogen a b d, den man aus einem Punkte c einer geraden Linie a d auf eben dieſer beſchreiben kann, iſt allemal ein halber Umfang

F. 4. 17. Sind die Winkel a c e, und a c b gleich, und man drehet den Ausſchnitt a c e um den unbeweglichen Halbmeſſer a c; ſo muß der Schenkel c e auf den Schenkel c b fallen, folglich der Punkt e mit b, und alle Punkte des Bogens a e mit den Punkten des Bogens a b übereinſtimmen; alſo werden dieſe Bögen ſich decken, und gleich ſeyn. Und ſind die Bögen a e und b a gleich, und man drehet den Ausſchnitt a c e wieder um den unbeweglichen Halbmeſſer c a; ſo muß der Bogen a e auf den Bogen a b fallen, weil die Punkte beeder Bögen gleichweit von dem Mittelpunkte c abſtehen; alſo wird der Punkt e mit b übereinſtimmen, weil die Bögen gleich ſind, folglich decket der Winkel a c e den Winkel a c b, und iſt ihm gleich.

Daher ſind in jedem Kreiſe die Bögen, welche gleichen Winkeln beym Mittelpunkte, und die Winkel beym Mittelpunkte, welche gleichen Bögen entgegen ſtehen, einander gleich.

F. 5. 18 Iſt der Umfang eines Kreiſes in 360 gleiche Theile a b, b d, d e, &c. eingetheilt, und man zieht durch alle Theilungspunkte die Halbmeſſer; ſo entſtehen 1tens um den Mittelpunkt c 360 gleiche Winkel a c b, b c d, d c e, &c. weil dieſe Winkel den gleichen Bögen a b, b d, d e &c. entgegen ſtehen, alſo 2tens auch auf jedem andern Umfange, der aus c beſchrieben iſt, wieder 360 gleiche Bögen m n, n o, o p &c. weil dieſe Bögen den gleichen Winkeln m c n, n c o, o c p entgegen ſtehen.

Der

Der 360te Theil a b oder m n eines jeden Umfanges, ſo wie der Winkel beym Mittelpunkt a c b, welcher einem ſolchen Bogen a b oder m n entgegen ſteht, wird **Grad** genennt; und eben ſo wird jeder Grad wieder in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden, jede Sekunde in 60 Terzen u. ſ. f. eingetheilt.

Die Grade, Minuten, Sekunden und Terzen, werden ſo wie die Klaftern, Schuhe, Zoll und Linien mit (o), ('), (''), (''') bezeichnet.

Wieviel immer ein Bogen a e von jenen 360 gleichen Theilen a b, b d &c. des großen Umfangs enthält, eben ſoviel enthält auch der Winkel a c e von jenen 360 gleichen Winkeln a c b, b c d &c. welche den Bögen a b, b d &c. entgegen ſtehen, und eben ſo viel enthält der Bogen m p von jenen 360 gleichen Theilen m n, n o &c. des kleinen Umfanges, welche den gleichen Winkeln a c b, b c d &c. entgegen ſtehen.

Es hat alſo jeder Winkel a c e eben ſo viel Grade, als jeder Bogen a e oder m p, welcher aus ſeinem Scheitel zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchrieben wird.

In dieſem Verſtande ſagt man: **der Winkel** a c e **beym Mittelpunkte habe den Bogen** a e **oder** m p, **worauf er ruht, zum Maße,** oder, **der Winkel** a c e **ſey dem Bogen** a e **oder** m p **gleich.**

19. Iſt a c d eine gerade Linie, und man beſchreibt F. 4 aus dem gemeinen Scheitel c der Winkel b c a und b c d auf der Graden d a einen Halbkreis; ſo machen die zween Bogen a b und b d zuſammen 180 Grade aus: allein der Bogen a b iſt dem Winkel b c a und der Bogen b d dem Winkel b c d gleich; alſo machen auch die Winkel b c a und b c d zuſammen 180 Grade aus.

Würden nun die zween Winkel b c n und b c d auch 180 Grade ausmachen; ſo wäre b c n + b c d = b c a + b c d, alſo b c n = b c a; folglich müßte der Winkel b c n den Winkel b c a decken, und c n mit c a nur eine

und

und dieſelbe Linie ausmachen, alſo d c n abermal eine gerade Linie ſeyn.

Winkel, wie b c a, und b c d, welche einen gemeinen Scheitel, und einen gemeinen Schenkel haben, und an beeden Seiten dieſes gemeinen Schenkels liegen, heißen **Nebenwinkel.**

Nebenwinkel, welche auf einer geraden Linie liegen, haben alſo zuſammen 180 Grad; und wenn zween Nebenwinkel zuſammen 180 Grade ausmachen, ſo liegen ſie auf einer geraden Linie.

F. 4. 20. Wenn zwo Geraden a d und b q ſich in einem Punkte c ſchneiden; ſo ſind die Nebenwinkel b c a + b c d = 180°, und die Nebenwinkel b c d + d c q = 180°; alſo iſt b c a + b c d = b c d + d c q, folglich b c a = d c q. Wäre nun b c n auch gleich d c q; ſo wäre ferner b c a = b c n; alſo müßte der Winkel b c n den Winkel b c a decken, c n mit c a nur eine und dieſelbe Linie ausmachen, und d c n abermal eine gerade Linie ſeyn.

Die an der Spitze entgegengeſetzten Winkel, a c b und d c q zwiſchen zwo geraden Linien ſind alſo gleich. Und ſind zween an der Spitze entgegengeſetzte Winkel d c q und b c n, welche beederſeits an einer geraden Linie b q liegen, gleich; ſo liegen auch ihre zween übrigen Schenkel d c und c n in einer geraden Linie.

Wenn alſo die Anzahl der Grade des einen aus den Nebenwinkeln, welche auf einer geraden Linie liegen, bekannt iſt; ſo giebt ſie von 180 abgezogen auch die Anzahl der Grade des andern. Und wenn einer von den vier Winkeln, welche um den Durchſchnitt zwoer geraden Linien liegen, gegeben iſt; ſo ſind es auch die drey übrigen.

F. 6. 21. Zieht man von einem Punkte a auſſer der Geraden b c, die Geraden a b und a c; ſo entſteht eine Ebene, welche in drey gerade Linien eingeſchloſſen iſt. Eine ſolche Ebe-

Ebene heißt **Dreyeck**; die Gerade a b, a c und b c werden deſſen **Seiten**, und die Punkte a, b, und c deſſen **Scheitel** genennt.

Weil der gerade Weg zwiſchen zween Punkten kürzer iſt als jeder andere, welcher von dem geraden abweicht; ſo iſt jede Seite eines Dreyeckes kleiner, als die Summe der zwo andern.

Zieht man durch jeden Punkt d innerhalb des Dreyeckes a b c, die Geraden d c und b e; ſo iſt in dem Dreyecke d c e F. 6.

$dc < de + ec$, alſo,
$bd = bd$ beederſeits addirt,
$bd + dc < bd + de + ec$ oder
$bd + dc < be + ec$.

Und in dem Dreyecke a e b iſt
$be < ba + ae$, alſo,
$ec = ec$ beederſeits addirt,
$be + ec < ba + ae + ec$ oder
$be + ec < ba + ac$.

Folglich iſt um ſoviel mehr
$bd + dc < ba + ac$.

Wenn alſo zwey Dreyecke eine gemeine Seite haben, und der Scheitel des einen in dem andern Dreyecke liegt; ſo iſt die Summe der zwo übrigen Seiten des erſten kleiner als die Summe der zwo übrigen Seiten des andern Dreyeckes.

Von den geraden Linien, welche man von jedem Punkte bis an einen Umfang ziehen kann.

22.

Wenn man von jedem Punkte a, welcher von dem F. 7.
Mittelpunkte c unterſchieden iſt, bis an einen Umfang 8.
die Gerade ab durch c, die Geraden ae, af und 9.
die Halbmeſſer c e, c f zieht; ſo iſt

in

in dem Dreyecke a c e F. 7. 8. 9.

$ac + ce > ae$, alſo,

weil $ac + ce = ab$ iſt,

$ab > ae$

in dem Dreyecke a c f F. 7.

$af + fc > ac$, alſo,

$fc = dc$ beederſeits abgezogen,

$af > ac - dc$ oder

$af > ad$

in dem Dreyecke a c f F. 8.

$af + ac > fc$ oder

$af + ac > dc$, alſo

$ac = ac$ beederſeits abgezogen,

$af > dc - ac$ oder

$af > ad$.

in dem Dreyecke e o c F. 7. 8. 9.

$eo + oc > ec$ oder

$eo + oc > fc$, alſo

$oc = oc$ beederſeits abgezogen,

$eo > fc - oc$ oder

$eo > of$,

und in dem Dreyecke a o f

$ao + of > af$,

alſo um ſoviel mehr

$ao + oe > af$ oder

$ae > af$.

Iſt endlich Fig. 7. 8. 9. der Bogen $bg = bf$, und man dreht die ganze Figur um die unbewegliche a b; ſo muß der Bogen b g den Bogen b f decken, und der Punkt g mit dem Punkte f übereinkommen, folglich die Gerade a g der Geraden a f gleich ſeyn.

Aus allen Geraden, welche man von einem andern Punkte a als dem Mittelpunkte bis an einen Umfang ziehen kann, iſt alſo jene a b die größte, welche durch den Mittelpunkt geht, jene a d die kleinſte, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht,

geht, die übrigen a f, a e werden immer größer, je kleiner die Bögen b f, b e werden, welche zwiſchen ihnen und der größten begriffen ſind, jede zwo a f, a g aber, welche beederſeits gleiche Bögen b f, b g mit der größten abſchneiden, ſind einander gleich.

23. Iſt a b die Größte; ſo kann keine andere durch F. 7.
den Mittelpunkt gehen; ſonſt wäre dieſe andere wider die 8.
Vorausſetzung größer als a b. Iſt a d die kleinſte; ſo kann die 9.
Verlängerung einer jeden andern auch nicht durch den Mittelpunkt gehen; ſonſt wäre dieſe andere abermal wider die Vorausſetzung kleiner als a d. Iſt a e größer als a f; ſo kann b e weder b f gleich, noch größer als b f ſeyn; ſonſt wäre a e wider die Vorausſetzung auch a f gleich, oder kleiner als a f. Iſt endlich a f = a g; ſo kann b f nicht gleich b n größer oder kleiner als b g ſeyn; ſonſt wäre wider die Vorausſetzung a f = a n, kleiner oder größer als b g.

Daher geht die größte, und die Verlängerung der kleinſten aus den Geraden, welche man von einem Punkte a auf einen Umfang ziehen kann, allemal durch den Mittelpunkt, und die größern ſchneiden mit der größten kleinere, und die gleichen gleiche Bögen ab.

24. Iſt a f = a g; ſo iſt auch b f = b g, alſo a n F. 7.
größer oder kleiner als a g und a f, nachdem b n kleiner 8.
oder größer, als b g oder b f iſt. 9.

Daher können nie drey Punkte f, g, n, eines Umfanges von einem andern a als dem Mittelpunkte gleichweit abſtehen, folglich kann auch nie ein Umfang mit einem anderen drey Punkte gemein haben, oder alle Umfänge, welche drey Punkte gemein haben, müſſen aus demſelben Mittelpunkte beſchrieben ſeyn, und nur einen und denſelben Umfang ausmachen.

25. Weil a d die kleinſte, und a b die größte aus allen F. 7.
Geraden iſt, welche man von a auf den Umfang f b g d f 8.
zie- 9.

ziehen kann; und jede zwo, af, ag, welche beederſeits mit ab gleiche Bögen abſchneiden, gleich ſind; ſo hat jeder Umfang, den man aus a beſchreibt, mit dem Umfange fbgdf 1tens keinen Punkt gemein, wenn ſein Halbmeſſer kleiner als ad oder größer als ab iſt, 2tens nur einen Punkt gemein, wenn ſein Halbmeſſer ad oder ab gleich iſt, und 3tens allemal zween Punkte gemein, einen f auf einer Seite und einen andern g auf der andern Seite der Geraden ab, welche durch die Mittelpunkte geht, wenn ſein Halbmeſſer größer als ad und zugleich kleiner als ab iſt.

F. 7. 26. Sind zwo Seiten ac und ce des Dreyeckes ace
8. zwoen Seiten ac und cf des Dreyeckes acf wechſelweiſe
9. gleich, und man legt das Dreyeck ace ſo auf das Dreyeck acf hin, daß a mit a, und c mit c übereinkommen; ſo muß der Scheitel e des Dreyeckes ace in den Umfang, den man aus c mit dem Halbmeſſer cf beſchreibt, fallen; ſonſt wären ce und cf wider die Vorausſetzung ungleich.

Iſt nun ae größer als af; ſo iſt be kleiner als bf, der Scheitel e zwiſchen b und f, alſo der Winkel ace größer als acf. Und iſt der Winkel ace größer als acf; ſo iſt e wieder zwiſchen b und f, und be kleiner als bf, folglich ae größer als af.

Wenn alſo zwey Dreyecke zwo Seiten wechſelweiſe gleich haben; ſo iſt jener von den gleichen Seiten eingeſchloſſene Winkel größer, welcher der größern dritten Seite, und jene dritte Seite größer, welche dem größern von den gleichen Seiten eingeſchloſſenen Winkel entgegengeſetzt iſt.

Iſt ferner nebſt den gleichen Seiten ac und ac, ce und cf, 1tens die Seite ae = af; ſo iſt auch der Bogen be = bf, alſo der Scheitel e in f. Iſt 2tens der Winkel ace = acf; ſo fällt die Seite ce in cf, alſo wieder der Scheitel e in f. Und ſetzt man endlich 3tens anſtatt der gleichen Seiten ce und cf, die Winkel ace = acf, und cae = caf; ſo muß wegen der gleichen Winkel ace und acf die Seite ce über cf, und we-

gen der gleichen Winkel c a e und c a f die Seite a e über a f, alſo der Scheitel e in c f und a f, folglich wieder in den Durchſchnitt f fallen.

Wenn alſo zwey Dreyecke a c e und a c f alle drey Seiten, oder zwo Seiten und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel, oder endlich eine Seite und die zween daranliegenden Winkel wechſelweiſe gleich haben; ſo decken ſie ſich, und ſind vollkommen gleich, das iſt, ſie haben gleiche Flächen, und jene Winkel, welche gleichen Seiten und jene Seiten, welche gleichen Winkeln entgegenſtehen, einander gleich.

27. Sind in zween gleichen Kreiſen die Winkel a c f F. 9.
und a c h gleich; ſo haben die Dreyecke a c f und a c h 10.
wegen der gleichen Halbmeſſer zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich; alſo ſind es auch ihre dritten Seiten, die Sehnen a h und a f, welche den gleichen Winkeln a c h und a c f entgegenſtehen. Und ſind die Sehnen a h und a f gleich; ſo haben die Dreyecke a c h und a c f wegen der gleichen Halbmeſſer alle drey Seiten wechſelweiſe gleich; alſo ſind es auch die Winkel a c h und a c f, welche den gleichen Seiten, den Sehnen a h und a f, entgegengeſetzet ſind.

Iſt ferner der Winkel a c e größer, als a c h oder a c f; ſo iſt b e kleiner als b f oder b h, alſo a e größer, als a f oder a h: und iſt a e größer, als a h oder a f; ſo iſt b e kleiner, als b f oder b h, alſo der Winkel a c e größer, als a c f oder a c h.

Daher ſind in demſelben oder gleichen Kreiſen 1tens die Sehnen gleich, welche gleichen Winkeln beym Mittelpunkte, und die Winkel beym Mittelpunkte gleich, welche gleichen Sehnen entgegenſtehen: 2tens die Sehnen größer, welche größern Winkeln beym Mittelpunkte, und die Winkel beym Mittelpunkte größer, welche größern Sehnen entgegengeſetzet ſind.

Weil die Winkel beym Mittelpunkte den Bögen, worauf ſie ruhen, gleich ſind; ſo können anſtatt der Winkel a c h, a c f und a c e die Bögen a h, a f und a e, welche allemal unter 180 Graden ſind, geſeßet werden.

So lang daher Bögen unter 180 Graden ſind; ſo ſind in demſelben oder gleichen Kreiſen 1tens die Sehnen gleicher Bögen und die Bögen gleicher Sehnen gleich, und 2tens gehören größere Sehnen zu größern Bögen, und größere Bögen zu größern Sehnen.

F. 11. 12. 28. Iſt aus dem Punkte o auf der Geraden o p ein Winkel zu zeichnen, welcher dem gegebenen Winkel d e f gleich iſt, und man beſchreibt aus e mit einem beliebigen Halbmeſſer e n einen Bogen n m, und aus o mit demſelben Halbmeſſer einen unbegränzten Bogen p q, trägt ſodann die Sehne n m auf den Bogen p q von p in q, und zieht o q; ſo ſind dieſe zween Winkel e und o in gleichen Kreiſen gleichen Sehnen entgegengeſeßet, alſo einander gleich.

F. 6. 11. Ebenſo läßt ſich auch ein Dreyeck d e f, welches einem gegebenen Dreyecke a b c vollkommen gleich iſt, zeichnen. Denn nimmt man e f = c b, beſchreibt aus e mit dem Halbmeſſer b a einen Bogen, ſchneidet aus f mit dem Halbmeſſer c a dieſen Bogen in d, und zieht endlich d e und d f; ſo haben dieſe Dreyecke d e f und a b c alle drey Seiten wechſelweiſe gleich, und ſind daher vollkommen gleich.

Anwendung.

F. 20. 29. Iſt auf dem Felde ein Winkel q o s, welcher einem gegebenen Winkel a c b gleich ſeyn ſoll, auszuſtecken, und man bedienet ſich anſtatt des Zirkels der Meßkette; ſo kann man wie auf dem Papiere zu Werke gehen. Denn nimmt man auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Halbmeſſer c n und c m von gleichviel Klaftern, mißt die Sehne, n m, macht o p gleich dem Halbmeſſer

meſſer c n, befeſtiget ein End der Kette in o und das andere in p, nimmt das Kettenſtück o r = c m, und das Kettenſtück p r = n m und zieht die Ende r dieſer Kettenſtücke in einen Punkt q zuſammen; ſo wird der Winkel q o p dem Winkel a c b gleich; weil ſie in gleichen Kreiſen den gleichen Sehnen n m und p q entgegenſtehen.

30. Weil zwey Dreyecke einander vollkommen gleich ſind, ſobald ſie zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel, oder eine Seite und die zween anliegenden Winkel wechſelweiſe gleich haben; ſo läßt ſich in einer beliebigen Ebene allemal ein Dreyeck m o n ausſtecken, welches einem gegebenen Dreyecke a c b vollkommen gleich iſt, ſobald man von dieſem Fig. 21. zwo Seiten a c und b c nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel c, oder Fig. 22. eine Seite a c nebſt den anliegenden Winkeln c und a in ſeiner Gewalt hat. Denn mißt man dieſe Seiten, und macht Fig. 21. den Winkel o = c, die Seite o n = c b, und die Seite o m = c a, oder Fig. 22. die Seite o m = c a, den Winkel o = c und den Winkel m = a, und ſucht den Durchſchnitt der Schenkel o n und m n; ſo wird in beeden Fällen das Dreyeck m o n dem Dreyecke a c b vollkommen gleich. F.21. 22.

Weil die an der Spitze entgegengeſetzten Winkel zwiſchen zwo geraden Linien gleich ſind; ſo kann man kürzer verfahren. Denn verlängert man a c und b c, und nimmt Fig. 21. c d = c b, und c e = c a, oder macht Fig. 22. c e = c a, den Winkel e = a, und ſucht den Durchſchnitt d des Schenkels e d und der Verlängerung c d; ſo haben die Dreyecke d c e und a c b im erſten Falle zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel, und im zweyten Falle eine Seite und die zween anliegenden Winkel wechſelweiſe gleich, und ſind daher wieder vollkommen gleich.

Iſt das gegebene Dreyeck nur an einem Scheitel c zugängig, und man nimmt zween beliebige Punkte p und q an; ſo hat man von dem Dreyecke c p b die Seite c p F.23.

nebſt den Winkeln c und p, und in dem Dreyecke c q a die Seite c q nebſt den Winkeln c und q in ſeiner Gewalt; alſo kann man wie im 2ten Falle, das Dreyeck y p x dem Dreyecke c p b und das Dreyeck u q z dem Dreyecke c q a vollkommen gleich machen, die Seiten x y und z u meſſen, und wie im erſten Falle die Verlängerung c e = z u = a c, und die Verlängerung c d = x y = b c nehmen, alſo wieder ein Dreyeck d c e, welches dem Dreyecke a c b vollkommen gleich iſt, ausſtecken.

F.24. Nimmt man den Punkt p in der Seite c b und den Punkt q in der Seite c a an; ſo kürzet ſich dieſes Verfahren von ſich ſelbſt ab. Denn macht man 1tens c y = c p, den Winkel y = p, und ſucht den Durchſchnitt e des Schenkels y e und der Verlängerung c e, und nimmt 2tens c u = c q, den Winkel u = q, und ſucht den Durchſchnitt d des Schenkels u d und der Verlängerung c d; ſo wird wegen der vollkommen gleichen Dreyecke y c e und p c a die Verlängerung c e = c a, und wegen der vollkommen gleichen Dreyecke u c d und q c b die Verlängerung c d = c b, alſo auch das Dreyeck d c e dem Dreyecke a c b vollkommen gleich.

F.22. Nachdem man im 2ten Falle die Verlängerung c e = c a genommen hat; ſo bekömmt man auch den Winkel e = a, wenn man in der Seite a b einen beliebigen Punkt s annimmt, und die Verlängerung c t = c s macht. Denn weil die Dreyecke e c t und a c s zwo Seiten und die eingeſchloſſenen Winkel c wechſelweiſe gleich haben; ſo ſind es auch die Winkel e und a, welche den gleichen Seiten c t und c s entgegenſtehen.

F.24. Nach dieſem läßt ſich das Verfahren im dritten Falle noch mehr abkürzen; denn macht man c y = c p und c u = c q, ſucht den Durchſchnitt S der Geraden p a und q b, und nimmt die Verlängerung c T = c S; ſo wird wegen der vollkommen gleichen Dreyecke p c S und y c T der Winkel y = p, und wegen der vollkommen

glei-

gleichen Dreyecke q c S und u c T, der Winkel u = q, wie zuvor.

Soll nun eine gerade Linie a b, welche Fig. 21. nur an beeden Enden, Fig. 22. nur an einem Ende, oder Fig. 23. und 24. gar nicht zugängig iſt, gemeſſen werden; ſo kann man einen beliebigen Punkt c annehmen, ein Dreyeck d c e ausſtecken, welches dem Dreyecke a c b vollkommen gleich iſt, und ſodann die Seite d e = a b meſſen.

Von den geraden Linien, welche von einem Punkte auf eine andere gerade Linie gezogen werden können.

31.

Zieht man von jedem Punkte c auf eine Gerade a b die Gerade c d oder c a; ſo ſind die Nebenwinkel gleich, wie c d a und c d b, oder ungleich, wie c a b und c a g. Im erſten Falle hat ein jeder 90 Grade, und wird ein **rechter** Winkel genennt, im zweyten Falle hat der eine mehr und der andere weniger als 90 Grade, und beede heißen **ſchiefe** Winkel. Ferner wird der ſchiefe Winkel, welcher größer als ein rechter iſt, ein **ſtumpfer**, und welcher kleiner als ein rechter iſt, ein **ſpitzer** Winkel genennt. Endlich nennt man die Gerade c d, welche mit a b rechte Winkel macht, **ſenkrecht auf** a b, und die Gerade c a, welche mit a b ſchiefe Winkel macht, **ſchief auf** a b. F. 25.

Iſt d a = d b, und c d ſenkrecht auf a b; ſo haben die Dreyecke c d a und c d b, wegen der gemeinen Seite c d zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich; alſo ſind es auch die Seiten c a und c b, welche den gleichen Winkeln bey d entgegen ſtehen.

Verlängert man c d, bis d f gleich d c wird, und zieht von jeden zween Punkten a und g die Geraden c a und a f, c g und g f; ſo iſt, wie zuvor c a = a f und c g = g f.

Allein es iſt 1tens in dem Dreyecke caf, ca + af größer als cf, alſo auch ca die Hälfte von ca + af größer als cd die Hälfte von cf, und 2tens, weil der Scheitel a des Dreyeckes caf in dem Dreyecke cgf liegt, cg + gf größer als ca + af, alſo auch cg die Hälfte von cg + gf größer als ca die Hälfte von ca + af.

Aus allen Geraden, welche man von einem Punkt c auf eine andere Gerade ab ziehen kann, iſt alſo die Senkrechte cd die kleinſte; die andern ca, cg werden immer größer, je mehr ſie von der Senkrechten cd abweichen, und jede zwo ca, cb, welche beederſeits gleichviel von der Senkrechten abweichen, ſind gleich.

F. 25. 32. Iſt cd die kleinſte aus allen Geraden, welche von dem Punkte c auf ab gezogen werden können; ſo kann keine andere als cd ſenkrecht auf ab ſeyn, ſonſt wäre wider die Vorausſetzung dieſe andre kleiner als cd: da nun allemal eine aus allen ſenkrecht ſeyn wird; ſo muß es cd ſeyn. Iſt ferner cg größer als cb; ſo kann dg weder gleich db noch gleich dn kleiner als db ſeyn, ſonſt wäre wider die Vorausſetzung cg auch gleich cb oder gleich cn kleiner als cb; alſo iſt dg größer als db. Iſt endlich ca = cb; ſo kann da nicht gleich dn größer oder kleiner als db ſeyn, ſonſt wäre wider die Vorausſetzung ca auch gleich cn größer oder kleiner als cb; alſo iſt da = db.

Daher iſt die kleinſte aus allen Geraden, welche man von einem Punkte c auf eine Gerade ab ziehen kann, allemal ſenkrecht auf ab, und die größern weichen immer mehr, und die gleichen gleichviel von der Senkrechten ab.

F. 28. 33. Weil die Senkrechte cd mit ab zween rechte Winkel macht; ſo macht jede andere dr zween ſchiefe: und weil die Senkrechte cd die kleinſte iſt; ſo kann jede andre ca nimmermehr kleiner als cd, alſo auch nimmermehr ſenkrecht auf ab ſeyn.

Durch

Durch jeden Punkt d oder c iſt alſo auf eine und dieſelbe Gerade a b nur eine Senkrechte möglich.

Daher machen jede zwo Geraden, welche einen Punkt gemein haben, und ſenkrecht auf eine dritte ſind, nur eine und dieſelbe Gerade aus; und zwo verſchiedene Geraden d c und a h, welche auf eine dritte a b ſenkrecht ſind, können einander nirgends begegnen: denn würden jene verſchieden ſeyn, oder dieſe ſich in einem Punkte begegnen; ſo wären wider den vorigen Satz aus demſelben Punkte zwo verſchiedene Senkrechten auf dieſelbe Gerade möglich.

34. Iſt c a = c b, und c d ſenkrecht auf a b; ſo iſt auch d a = d b, alſo jede andere c n größer oder kleiner als c b oder c a, nachdem d n größer oder kleiner als d b oder d a iſt. F. 25.

Daher können nie drey Punkte a, b, n, einer Geraden a b von einem vierten c gleichweit abſtehen, alſo auch nie ein Umfang drey Punkte mit einer geraden Linie gemein haben; ſondern jeder Umfang, den man aus c beſchreibt, hat mit der Geraden a b, keinen Punkt, den einzelnen Punkt d, oder zween Punkte a und b gemein, nachdem ſein Halbmeſſer gleich c p kleiner als c d, gleich c d, oder gleich c q größer als c d iſt. Denn im erſten Falle ſind alle Punkte der Geraden, und im zweyten Falle alle, ausgenommen d, weiter als die Punkte des Umfanges von dem Mittelpunkte c entfernt, und im dritten Falle liegen Punkte des Umfanges auf einer und auf der andern Seite der Geraden, alſo muß jener einen Punkt a und folglich auch einen andern b, der ebenſoweit als a von d abſteht, mit dieſer gemein haben. F. 26.

35. Wenn ein Umfang und eine Gerade a b nur einen Punkt d gemein haben; ſo ſagt man: der Kreis und die Gerade **berühren** einander in dem Punkte d. Die Gerade a b wird **Tangente** des Kreiſes, und der Punkt d der Tangente **Berührungspunkt** genennt. F. 26.

Die Senkrechte a b auf einen Halbmeſſer c d, welche durch den äußerſten Punkt d deſſelben geht, iſt alſo allemal eine Tangente des Kreiſes.

F. 26. Zieht man auf den Berührungspunkt d einer Tangente a b den Halbmeſſer c d; ſo iſt, weil alle Punkte der Tangente, ausgenommen d, außer dem Umfange liegen, c d die kleinſte aus allen Geraden, welche man aus c auf a b ziehen kann; folglich iſt c d ſenkrecht auf a b. Und weil durch denſelben Punkt c oder d nur eine Senkrechte auf a b möglich iſt; ſo macht jede Senkrechte auf a b, welche durch c oder d geht, allemal mit dem Halbmeſſer c d nur eine und dieſelbe Linie aus.

Daher iſt der Halbmeſſer, welcher durch den Berührungspunkt geht, ſenkrecht auf die Tangente. Und wenn die Senkrechte auf eine Tangente durch einen aus dieſen zween Punkten, den Mittelpunkt oder den Berührungspunkt geht; ſo geht ſie auch durch den andern.

F. 26. 36. Iſt c d ſenkrecht auf a b; und 1tens d a = d b; ſo iſt auch c a = c b, alſo jeder Punkt c der Senkrechten, welche durch d geht, gleichweit von a und b entfernt: und iſt 2tens c a = c b; ſo iſt wieder d a = d b, alſo auch jeder Punkt der Senkrechten c d, welche durch c geht, gleichweit von a und b entfernt. Iſt endlich 3tens auch e a = e b, und man zieht e d; ſo haben die Dreyecke e d a und e d b wegen der gemeinen Seite e d alle drey Seiten wechſelweiſe gleich, alſo ſind es auch die Winkel e d a und e d b, welche den gleichen Seiten e a und e b gegenüberſtehen: folglich iſt e d ſenkrecht auf a b, und macht wegen des gemeinen Punktes d mit der Senkrechten c d nur eine und dieſelbe Linie aus; alſo iſt e ein Punkt der Senkrechten c d.

Wenn alſo ein Punkt der Senkrechten auf eine Gerade von zween Punkten a und b eben dieſer Geraden gleichweit abſteht; ſo ſteht jeder Punkt der

Senk-

Senkrechten von eben dieſen zween Punkten gleichweit ab, und jeder Punkt, welcher von dieſen zween Punkten gleichweit abſteht, gehört auch allemal zu derſelben Senkrechten.

37. Iſt der Bogen qa = qb; ſo iſt auch der Winkel qca = qcb; alſo haben die Dreyecke cda und cdb zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Seiten da und db, und die Winkel cda und cdb. F. 26.

Iſt da = db; ſo haben die Dreyecke cda und cdb wegen der gleichen Halbmeſſer ca und cb alle drey Seiten wechſelweiſe gleich; alſo ſind es auch die Winkel cda und cdb, und die Winkel dca und dcb, oder die Bogen qa und qb.

Iſt der Winkel cda = cdb; ſo iſt wegen der gleichen Halbmeſſer ca und cb auch da = db; alſo haben die Dreyecke cda und cdb wieder alle drey Seiten wechſelweiſe gleich, folglich ſind es auch die Winkel dca und dcb oder die Bogen qa und qb.

Iſt endlich dq ſenkrecht auf ab, und da = db; ſo iſt der Punkt d der Senkrechten dq gleichweit von a und b entfernt, alſo gehört der Mittelpunkt c, welcher auch gleichweit von a und b entfernt iſt, zu derſelben Senkrechten dq.

Halbirt daher ein Halbmeſſer cq einen Bogen ab; ſo halbirt er auch die Sehne ab, und iſt ſenkrecht auf dieſelbe: halbirt ein Halbmeſſer cq, eine Sehne ab; ſo halbirt er auch den Bogen ab, und iſt ſenkrecht auf die Sehne: und iſt ein Halbmeſſer cq ſenkrecht auf eine Sehne ab; ſo halbirt er die Sehne und den Bogen ab. Endlich geht die Senkrechte, welche eine Sehne halbirt, durch den Mittelpunkt des Kreiſes.

38. In jedem Dreyecke ſind alle drey Seiten oder zwo derſelben gleich, oder alle drey ungleich. Im erſten

Falle heißt das Dreyeck **gleichſeitig**, im zweyten **gleichſchenklicht**, und im dritten **ungleichſeitig**.

In einem gleichſchenklichten Dreyecke werden die zwo gleichen Seiten **Schenkel**, und die dritte **Grundlinie** genennt.

F. 26. Wenn man aus dem Scheitel c eines gleichſchenklichten Dreyeckes c a b, mit dem Halbmeſſer c a einen Bogen beſchreibt; ſo wird dieſer, weil c a = c b iſt, durch b gehen, alſo a b eine Sehne von dem Bogen a q b werden, und jeder Bogen q a, q b das Maß des Winkels q c a, q c b ſeyn.

Halbirt daher eine Gerade c q, welche durch den Scheitel eines gleichſchenklichten Dreyeckes c a b geht, den Winkel an der Spitze; ſo halbirt ſie auch die Grundlinie a b und iſt ſenkrecht auf dieſelbe: halbirt die Gerade c q die Grundlinie a b; ſo halbirt ſie auch den Winkel an der Spitze und iſt ſenkrecht auf die Grundlinie: und iſt die Gerade c q ſenkrecht auf die Grundlinie a b; ſo halbirt ſie die Grundlinie und den Winkel an der Spitze. Endlich geht die Senkrechte c q, welche die Grundlinie eines gleichſchenklichten Dreyeckes halbirt, durch den Scheitel deſſelben.

F. 26. 27. 39. Wenn eine Gerade m n, und ein Punkt c einer Senkrechten auf m n gegeben iſt, und man beſchreibt aus c einen Bogen, welcher die Gerade m n in zween Punkten a und b ſchneidet; ſo gehört jeder Punkt, welcher von a und b gleichweit abſteht, zu derſelben Senkrechten. Beſchreibt man daher aus a und b mit einem beliebigen aber demſelben Halbmeſſer zween Bögen, welche ſich in einem Punkte e ſchneiden; ſo iſt e c ſenkrecht auf m n.

F. 27. Verlängert man den Halbmeſſer c b und zieht nach voriger Methode durch b auf c b die Senkrechte p q; ſo wird p q den Kreis in dem Punkte b berühren.

Be-

Beſchreibt man aus beyden Enden a und b einer Geraden a b mit demſelben Halbmeſſer zween Bögen, welche ſich in einem Punkte c, und zween andere, welche ſich in einem Punkte e ſchneiden; ſo iſt jeder aus dieſen zween Durchſchnitten gleichweit von a und b entfernt, alſo gehört jeder zu der Senkrechten, welche die Gerade a b in dem Punkte d halbiret; zieht man alſo dieſe Senkrechte c e; ſo wird d a = d b. F. 26.

Beſchreibt man aus dem Scheitel c eines Winkels a c b einen Bogen, welcher die Schenkel in a und b ſchneidet, und ſodann mit demſelben Halbmeſſer aus a und b zween Bögen, welche ſich in einem Punkte e ſchneiden, und zieht e c; ſo iſt e c ſenkrecht auf die Grundlinie a b des gleichſchenklichten Dreyeckes c a b, alſo der Winkel d c a = d c b. F. 26.

Beſchreibt man aus beyden Enden a und b eines Bogens a b mit demſelben Halbmeſſer zween Bögen, welche ſich in einem Punkte c, und zween andere, welche ſich in einem Punkte e ſchneiden, und zieht c e; ſo iſt c e ſenkrecht auf die Sehne a b und halbirt dieſelbe, alſo iſt auch q a = q b. F. 26.

Wir können alſo durch jeden Punkt c auf jede Gerade a b eine Senkrechte, und durch jeden Punkt b eines Umfanges eine Tangente ziehen, auch jede Gerade a b, jeden Winkel a c b und jeden Bogen a b halbiren.

Zieht man a e und b e; ſo haben vermöge der Zeichnung die Dreyecke e c a und e c b alle drey Seiten wechſelweiſe gleich, alſo ſind es auch die Winkel bey c und die Bögen, welche dieſe Winkel meſſen; und daher haben ferner die Dreyecke c d a und c d b zwo Seiten, und den eingeſchloſſenen Winkel bey c wechſelweiſe gleich; alſo ſind es auch die Winkel bey d und die Seiten d a und d b. Daher ſind die vorigen Zeichnungen auch aus dieſem Grunde richtig. F. 26. 27. F. 26.

40.

F. 28. 40. Sind in einem Dreyecke c a b die Seiten c a und c b gleich, und man zieht die Senkrechte c d; ſo iſt, weil ca = cb, auch da = db, alſo haben die Dreyecke c d a und c d b alle drey Seiten wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Winkel a und b, welche der gemeinen Seite c d entgegenſtehen.

Und ſind in jedem Dreyecke c a b die Winkel a und b gleich, und man halbirt die Seite a b durch die Senkrechte d r; ſo muß dieſe Senkrechte d r eine Seite c a oder c b in einem Punkte r ſchneiden: geſetzt ſie ſchneide cb, und man ziehe r a; ſo iſt in dem Dreyecke r a b die Seite r a = r b, alſo der Winkel r a b = r b a: allein nach der Vorausſetzung iſt auch der Winkel c a b = r b a; folglich iſt der Winkel r a b = c a b; alſo kömmt r a mit c a und der Durchſchnitt r mit c überein; folglich iſt c ein Punkt der Senkrechten, welche a b halbirt, alſo c a = c b.

In jedem Dreyecke ſind alſo die Winkel, welche gleichen Seiten, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberſtehen, einander gleich.

Daher ſind in einem gleichſchenklichten Dreyecke die Winkel an der Grundlinie und in einem gleichſeitigen alle drey Winkel gleich. Und jedes Dreyeck, welches zween Winkel gleich hat, iſt gleichſchenklicht, und welches alle drey Winkel gleich hat, gleichſeitig.

F. 29. 41. Iſt in jedem Dreyecke a e b der Winkel a e b größer als der Winkel a b e, und man macht den Winkel c e b = c b e; ſo iſt c b = c e. Beſchreibt man daher aus c mit dem Halbmeſſer c b einen Umfang, ſo muß dieſer auch durch e gehen; alſo iſt a b, welche durch den Mittelpunkt c geht, größer als a e. Und iſt a b größer als a e; ſo kann der Winkel a e b weder a b e gleich, noch kleiner als a b e ſeyn, ſonſt wäre wider die Vorausſetzung a b auch a e gleich oder nach Vorigem a b kleiner als a e; alſo iſt a e b größer als a b e.

Da-

Daher iſt in jedem Dreyecke jene Seite größer, welche einem größern Winkel, und jener Winkel größer, welcher einer größern Seite entgegenſteht.

42. Iſt cd ſenkrecht auf ab, und dg größer als db, und man nimmt da = db; ſo iſt ca = cb, und cg größer als cb, folglich in dem Dreyecke cab der Winkel cab = cba, und in dem Dreyecke cgb der Winkel cgb kleiner als der Winkel cbg; alſo iſt auch der Winkel cgb kleiner als cab. F.25.

Jemehr alſo die Geraden ca, cg, welche man von einem Punkte c auf eine Gerade ab zieht, von der Senkrechten cd abweichen, deſto kleiner werden die Winkel cad, cgd, welche der Senkrechten entgegenſtehen.

43. Iſt in jedem Dreyecke cda der Winkel d ein rechter; ſo iſt ca größer als die Senkrechte cd, und größer als die Senkrechte ad, alſo auch der Winkel d größer als der Winkel a, und größer als der Winkel c; folglich ſind die Winkel a und c ſpitze Winkel. F.25.

Iſt in jedem Dreyecke cag, der Winkel a ein ſtumpfer; ſo muß die Senkrechte cd auf die Seite des ſpitzen Winkels cab fallen. Denn fiele ſie von a gegen g; ſo wäre wider die Vorausſetzung cag nach Vorigem ein ſpitzer Winkel; daher ſind wegen des rechten Winkels cdg die Winkel dgc, dcg und um ſoviel mehr acg ſpitze Winkel.

Iſt in jedem Dreyecke gcb der Winkel c ein ſpitzer, und cd ſenkrecht auf gb; ſo ſind wegen der rechten Winkel bey d auch die Winkel g und b, folglich in dem Dreyecke gcb alle drey Winkel ſpitze.

Jedes Dreyeck hat alſo einen rechten Winkel und zween ſpitze, einen ſtumpfen Winkel und zween ſpitze, oder drey ſpitze Winkel. Im erſten Falle heißt das Dreyeck **rechtwinklicht**, im zweyten **ſtumpfwinklicht**, und im dritten **ſpitzwinklicht**. Im rechtwinklichten Dreyecke wird die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber-

ſteht,

F. 2 ſteht, **Hypothenuſe**, und jede der zwo übrigen **Kathede** genennt.

Weil in demſelben Dreyecke der größere Winkel der größern Seite entgegenſteht, und nur ein ſtumpfer oder nur ein rechter möglich iſt; ſo iſt dieſer oder jener allemal der größten Seite entgegengeſetzt, und daher iſt in jedem Dreyecke der Winkel, welcher einer kleinern Seite gegenüber ſteht, allemal ein ſpitzer.

F. 28. 44. Legt man zwey bey d rechtwinklichte Dreyecke cda und cdb ſo nebeneinander, daß der Scheitel des rechten Winkels und ein Schenkel deſſelben beyden gemein wird; ſo liegen, weil beede rechte Winkel zuſammen 180 Grade ausmachen, die zween übrigen Schenkel der rechten Winkel allemal in einer geraden Linie a b.

Iſt alſo 1tens c d = cd und d a = d b; ſo haben ſie zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich.

Iſt 2tens cd = cd und ca = cb; ſo iſt auch d a = d b; alſo haben ſie alle drey Seiten wechſelweiſe gleich.

Iſt 3tens c d = c d und dca = dcb; ſo haben ſie eine Seite und die zween anliegenden Winkel wechſelweiſe gleich.

Iſt 4tens c d = c d und der Winkel c a d = c b d; ſo hat das Dreyeck c a b die Winkel a und b gleich, alſo iſt auch ca = cb und d a = d b: folglich haben die zwey Dreyecke c d b und c d a alle drey Seiten wechſelweiſe gleich.

Iſt endlich 5tens c a = c b, und der Winkel d c a = d c b, und man legt den Winkel d c a ſo auf den Winkel d c b, daß c in c, ca in cb und cd in cd fällt; ſo muß der Punkt a mit b überein kommen, folglich, weil von demſelben Punkte nur eine Senkrechte auf eine Gerade möglich iſt, die Kathede a d in b d und der Punkt d des Dreyeckes c d a in dem Punkte d des Dreyeckes c d b liegen.

Da-

Daher ſind rechtwinklichte Dreyecke vollkommen gleich, ſobald ſie beede Katheden, eine Kathede und die Hypothenuſe, eine Kathede und den anliegenden ſpitzen Winkel, eine Kathede und den entgegengeſetzten Winkel, oder die Hypothenuſe und einen ſpitzen Winkel wechſelweiſe gleich haben.

45. Zieht man durch den Mittelpunkt c auf zwo gleiche Sehnen a g und a f die Senkrechten c p und c q; ſo iſt a p die Hälfte von a g = a q der Hälfte von a f; alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke c p a und c q a die Hypothenuſe, und eine Kathede wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Katheden c p und c q. Und ſind dieſe Senkrechten c p und c q gleich; ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke c p a und c q a wieder die Hypothenuſe und eine Kathede wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Katheden a p und a q, die Hälften der Sehnen, alſo auch die Sehnen a g und a f. F.30.

Iſt ferner a e größer als a f; ſo iſt b e kleiner als b f, alſo muß die Senkrechte c q die Sehne a e in einem Punkte o ſchneiden. Zieht man alſo c r ſenkrecht auf a e; ſo iſt die Hypothenuſe c o größer als die Kathede c r, alſo um ſoviel mehr c q oder c p größer als c r. Und iſt c q oder c p größer als c r; ſo muß a f außer a e liegen, alſo b e kleiner als b f, und folglich a e größer als a f oder a g ſeyn.

Daher ſind in jedem Kreiſe die Senkrechten, welche man von dem Mittelpunkte auf die Sehnen zieht, gleich oder kleiner, nachdem die Sehnen gleich oder größer ſind; und auch die Sehnen gleich oder kleiner, nachdem dieſe Senkrechten gleich oder größer ſind.

46. Wenn zwey Dreyecke g c b und n o m zwo Seiten g c und n o, c b und o m gleich haben; ſo ſind die Winkel g und n, welche den kleinern Seiten c b und o m entgegenſtehen, allzeit ſpitze, alſo fallen die Senkrechten c d F.31. 32. 33. 34.

und

und o d allzeit auf die Seite dieſer ſpitzen Winkel, folglich inner die Dreyecke Fig. 31. 32, wenn b und m ſpitze, und außer dieſelben Fig. 33. 34, wenn b und m ſtumpfe Winkel ſind.

Sind nun die Winkel b und m gleich Fig. 31. 32. oder Fig. 33. 34; ſo haben 1tens die rechtwinklichten Dreyecke c d b und o d m die Hypothenuſen c b und o m, und die ſpitzen Winkel c b d und o m d gleich; folglich ſind es auch die Katheden c d und o d, d b und d m: alſo haben 2tens die rechtwinklichten Dreyecke c d g und o d n die Hypothenuſen c g und o n und die Katheden c d und o d gleich; folglich ſind es auch die Katheden g d und n d, alſo iſt 3tens

Fig. 31. 32. g d + d b = n d + d m
oder g b = n m und
Fig. 33. 34. g d — d b = n d — d m
oder g b = n m;

folglich haben die Dreyecke g c b und n o m alle drey Seiten wechſelweiſe gleich.

Daher ſind Dreyecke, welche zwo Seiten und den der größern Seite entgegengeſetzten Winkel wechſelweiſe gleich haben, vollkommen gleich.

Sind aber die Winkel g und n gleich Fig. 31. 32. oder 33. 34, oder endlich 31. 34. ſo haben wieder 1tens die rechtwinklichten Dreyecke c d g und o d n die Hypotheſuſen c g und o n und die ſpitzen Winkel g und n gleich; folglich ſind es auch die Katheden c d und o d, g d und n d: alſo haben 2tens die rechtwinklichten Dreyecke c d b und o d m die Hypothenuſen c b und o m und die Katheden c d und o d gleich; folglich ſind es auch die Katheden d b und d m: alſo iſt 3tens Fig. 31. 32.

g d + d b = n d + d m oder
g b = n m und
Fig. 33. 34. g d — d b = n d — d m oder
g b = n m.

Fig.

F. 31. 34. aber $gb = gd + db$ und
$nm = nd - dm$, alſo
$gb > nm$;
folglich haben die Dreyecke gcb und nom die dritten Seiten gb und nm gleich, wenn beede Winkel b und m Fig. 31. 32. ſpiß oder Fig. 33. 34. ſtumpf ſind, und dieſe dritten Seiten ungleich, wenn einer dieſer Winkel m Fig. 34. ſtumpf und der andere b Fig. 31. ſpiß iſt.

Daher ſind Dreyecke, welche zwo Seiten und den der kleinern Seite entgegengeſetzten Winkel wechſelweiſe gleich haben, vollkommen gleich, wenn der Winkel, welcher der größern Seite gegenüberſteht, in beyden Dreyecken ſpiß oder in beyden ſtumpf iſt, und ungleich, wenn dieſer Winkel in einem Dreyecke ſpiß und in dem andern ſtumpf iſt.

Sind endlich in den Dreyecken gcb und nom Fig. 31. 32 und Fig. 33. 34. die Winkel $n = g$ und $m = b$, und die Seite $no = gc$; ſo haben 1tens die rechtwinklichten Dreyecke cdg und odn die Hypothenuſen no und gc, und die ſpißen Winkel n und g gleich; folglich ſind es auch die Katheden cd und od, gd und nd: alſo haben 2tens die rechtwinklichten Dreyecke cdb und cdm die Katheden cd und od und die entgegengeſetzten ſpißen Winkel b und m gleich; folglich ſind es auch die Katheden bd und md: alſo iſt 3tens Fig. 31. 32.
$gd + db = nd + dm$ oder
$gb = nm$ und
Fig. 33. 34. $gd - db = nd - dm$ oder
$gb = nm$;
folglich haben die Dreyecke gcb und nom zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich.

Daher ſind Dreyecke, welche eine Seite, einen anliegenden, und den entgegengeſetzten Winkel wechſelweiſe gleich haben, vollkommen gleich.

 Von

Von den Senkrechten, welche von den Punkten einer Geraden auf eine andere Gerade gezogen werden können.

47.

F. 35. Iſt a b und c d ſenkrecht auf m n, und p a b ein ſpitzer
36. Winkel; ſo wird die Senkrechte, welche man durch
37. a auf p q zieht, in den ſtumpfen Winkel q a b fallen, alſo
Fig. 35. durch den Punkt d gehen, oder Fig. 36. c d in einem Punkte o ſchneiden, oder endlich Fig. 37. b d in einem Punkte f begegnen.

Im 1ten und 2ten Falle iſt wegen des rechten Winkels q a d oder q a o der Winkel p c d ein ſpitzer Winkel. Im dritten Falle wird die durch f auf m n gezogene Senkrechte die Senkrechten a b und c d nirgends, alſo a c in einem Punkte e zwiſchen a und c begegnen. Zieht man daher e h ſenkrecht auf p q, h g ſenkrecht auf m n, g d ſenkrecht auf p q, bis endlich eine g d aus den Senkrechten auf p q durch den Punkt d geht, oder c d in einem Punkte o begegnet; ſo ſind, wie im 1ten oder 2ten Falle, die Winkel p e f, p g h, p c d ſpitze Winkel.

Und iſt der Winkel p c d ein ſpitzer Winkel; ſo wird die Senkrechte, welche man durch d auf p q zieht, auf die Seite des ſpitzen Winkels p c d fallen, alſo Fig 35. durch den Punkt a gehen, oder Fig. 36. a b in einem Punkte r ſchneiden, oder endlich Fig. 37. a c in einem Punkte g begegnen.

Im 1ten und 2ten Falle iſt wegen des rechten Winkels p a d oder r s a der Winkel p a b ein ſpitzer Winkel. Im dritten Falle wird die durch g auf m n gezogene Senkrechte g h die Senkrechten a b und c d nirgends, alſo b d in einem Punkte h zwiſchen b und d begegnen. Zieht man daher h e ſenkrecht auf p q, e f ſenkrecht m n, f a ſenk-

ſenkrecht auf pq, bis endlich eine fa aus den Senkrechten auf pq durch den Punkt a geht, oder ab in einem Punkte r begegnet; ſo ſind, wie im 1ten oder 2ten Falle, die Winkel pgh, pef, pab ſpitze Winkel.

Ferner iſt im 1ten Falle cd größer als die Senkrechte da, und da größer als die Senkrechte ab, alſo cd größer als ab. Und zieht man im 2ten Falle ad; ſo iſt cd größer als ad, weil cd mehr als ad von der Senkrechten ds abweicht, und ad größer als die Senkrechte ab, alſo wieder cd größer als ab. Folglich iſt auch im 3ten Falle, ſo wie im 1ten oder 2ten, cd größer als gh, gh größer als ef, ef größer als ab, alſo cd um ſoviel mehr größer als ab.

Wenn man alſo von was immer für Punkten a, c, e, g einer Geraden pq auf eine andere Gerade mn die Senkrechten ab, cd, ef, gh zieht; und pq auf eine aus dieſen Senkrechten ſchief iſt; ſo iſt pq ſchief auf alle, und alle ſind ungleich. F.38.

Iſt gh größer als ab, und man nimmt hl = ab, und zieht al; ſo iſt lab ein rechter Winkel, ſonſt wären wider die Vorausſetzung ab und al nach vorigem Satze ungleich; alſo iſt qab ein ſtumpfer Winkel, und pq wieder ſchief auf ab.

Sind alſo zwo von den Senkrechten, welche man von den Punkten einer Geraden pq auf eine andere mn zieht, ungleich; ſo iſt pq ſchief auf alle, und alle ſind ungleich.

Sind daher zwo ab und lh aus den Senkrechten, welche man von einer Geraden al auf mn zieht, gleich; ſo ſind alle gleich und ſenkrecht auf al.

Denn wären zwo ungleich oder al ſchief auf eine; ſo wären nach vorigen Sätzen alle, folglich wider die Vorausſetzung auch ab und lh ungleich.

Und iſt a l ſenkrecht auf eine a b; ſo ſind wieder alle gleich und ſenkrecht auf a l.

Denn wäre a l ſchief auf eine, oder nur zwey ungleich; ſo wäre a l nach vorigen Sätzen ſchief auf alle, alſo wider die Vorausſetzung auch ſchief auf a b.

48. Wenn alle Senkrechten, welche man von den Punkten einer Geraden auf eine andere Gerade ziehen kann, gleich ſind; ſo heiſſen dieſe zwo Geraden **gleichlaufend** oder **parallel.**

F. 38. **Sind alſo zwo Geraden a l und m n ſenkrecht auf eine dritte a b, oder zwo a b und l h aus den Senkrechten auf m n gleich; ſo ſind a l und m n gleichlaufend.**

F. 38. 49. Zieht man daher durch jeden Punkt a auf m n die Senkrechte a b, ſodann durch jeden Punkt h dieſer Geraden m n auf ebendieſelbe die Senkrechte h l gleich a b, und durch die Punkte a und l die Gerade a l; ſo iſt a l gleichlaufend mit m n.

Oder zieht man durch jeden Punkt a die Gerade a b ſenkrecht auf m n, und durch ebendieſen Punkt a die Gerade a l ſenkrecht auf a b; ſo iſt a l wieder gleichlaufend mit m n.

Es läßt ſich alſo durch jeden Punkt a mit einer gegebenen Geraden m n allemal eine Gleichlaufende a l ziehen.

F. 38. Weil alle Senkrechten a b, i d, k f, l h zwiſchen zwo Gleichlaufenden a l und m n gleich ſind; ſo werden alle gleich o, ſobald nur eine gleich o wird.

Daher machen die Gleichlaufenden, welche einen Punkt gemein haben, allemal nur eine und dieſelbe Linie aus; und zwo verſchiedene Gleichlaufenden können einander nirgends begegnen.

F. 38. 50. Iſt a l mit m n gleichlaufend, und a b ſenkrecht auf m n; ſo iſt auch a l ſenkrecht auf a b; denn wäre a l ſchief auf a b; ſo wären die Senkrechten, welche man von

a l

a l auf m n zieht, ungleich; alſo wider die Vorausſetzung a l nicht gleichlaufend mit m n.

Wenn alſo eine m n aus zwo Gleichlaufenden auf eine Gerade a b ſenkrecht iſt; ſo iſt es auch die andere a l.

51. Sind a l und x y gleichlaufend mit m n, und man zieht a b ſenkrecht auf m n; ſo ſind a l und x y ſenkrecht auf a b, alſo auch gleichlaufend. F.38.

Wenn alſo zwo Geraden a l und x y mit einer dritten m n gleichlaufen; ſo ſind ſie auch gleichlaufend unter ſich.

52. Wenn zwo Gleichlaufende p q und m n von einer Geraden S r in a und c geſchnitten werden, und man zieht a b ſenkrecht auf m n und c d ſenkrecht auf p q; ſo ſind dieſe Senkrechten a b und c d gleich, alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke a c b und c a d die Hypothenuſe und eine Kathede wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Winkel a c b und c a d, welche den gleichen Katheden a b und c d entgegenſtehen. F.39.

Da nun 1tens der Winkel x = y iſt, und die Nebenwinkel x und z ſo wie die Nebenwinkel u und y zuſammen 180 Grade ausmachen, alſo die Winkel x + z = u + y ſind; ſo iſt auch der Winkel z = u. F.40.

Da 2tens der Winkel x = y, und der an der Spitze entgegengeſetzte Winkel b = x iſt; ſo iſt auch der Winkel b = y: oder weil z = u, und a = z iſt; ſo iſt auch a = u.

Da endlich 3tens der Winkel x = y iſt, und die Nebenwinkel x und z zuſammen 180 Grade ausmachen; ſo machen auch die Winkel y und z zuſammen 180 Grade aus: oder weil x = y,

und y + u = 180° iſt, ſo iſt auch
x + u = 180°.

Wenn zwo Geraden von einer dritten geſchnitten werden, ſo heiſſen die Winkel, welche zwiſchen jenen zwo Geraden an beeden Seiten dieſer dritten liegen, wie x und y,

z und u, **Wechſelwinkel**, und welche zwiſchen jenen zwo Geraden an derſelben Seite dieſer dritten liegen, wie z und y, x und u, **innere entgegengeſetzte Winkel**: und liegt endlich einer auſſer, und der andere zwiſchen jenen zwo Geraden an derſelben Seite dieſer dritten, wie b und y, a und u; ſo wird jener der **äuſſere** und dieſer der **innere entgegengeſetzte** Winkel genennt.

Wenn alſo zwo gleichlaufende Geraden von einer dritten geſchnitten werden; ſo ſind 1tens die Wechſelwinkel, 2tens der äußere und der innere entgegengeſetzte Winkel einander gleich, und 3tens machen die zween innern entgegengeſetzten zuſammen allemal 180 Grade aus.

F. 39. 53. Iſt Fig. 39. der Winkel pac = nca, und
40. man zieht ao gleichlaufend mit mn; ſo iſt auch oac = nca, alſo pac = oac; folglich macht oa mit pa nur eine und dieſelbe Gerade aus, oder pq iſt mit mn gleichlaufend.

Iſt Fig. 40. der Winkel b = y, ſo iſt, weil die an der Spitze entgegengeſetzten Winkel b und x gleich ſind, auch x = y, alſo pq wieder mit mn gleichlaufend.

Machen endlich y und z 180 Grade aus; ſo iſt, weil x und z auch 180 Grade ausmachen, y + z = x + z, alſo y = x und daher pq wieder mit mn gleichlaufend.

Wenn alſo was immer für zwo Geraden von einer dritten geſchnitten werden, und die Wechſelwinkel, oder der innere und der äußere entgegengeſetzte Winkel einander gleich ſind, oder die innern entgegengeſetzten zuſammen 180 Grade ausmachen; ſo ſind jene zwo Geraden in jedem Falle gleichlaufend.

F. 41. 54. Iſt ab mit mn gleichlaufend, und von as in einem Punkte a geſchnitten; und man zieht am ſenkrecht auf mn, und aus jedem Punkte c der Geraden as die Ge-

Gerade c d ſenkrecht auf a b, trägt ſodann 1tens c d auf a m von a in k, von k in p, von p in q u. ſ. f., bis man auf einen Punkt u kömmt, welcher weiter als m von a abſteht, und 2tens a c ebenſo oft auf a s, von a in c, von c in e, von e in h u. ſ. f., und zieht endlich durch die Punkte c, e, h u. ſ. f. die Gleichlauſenden mit a b und die Senkrechten auf ebendieſelbe: ſo ſind die Winkel x äußere und innere entgegengeſetzte Winkel zwiſchen den Gleichlauſenden a b, c f, e i, h r, und die Winkeln y äußere und innere entgegengeſetzte Winkel zwiſchen den Gleichlauſenden c d, e g, h l, s b; folglich ſind alle Winkel x und alle Winkel y einander gleich; alſo haben die Dreyecke c d a, e f c, h i e, s r h, u. ſ. f. eine Seite und die zween anliegenden Winkel wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Seiten c d, e f, h i, s r u. ſ. f. welche den gleichen Winkeln x entgegenſtehen. Daher iſt e g = 2 c d = a p, h l = 3 c d = a q u. ſ. f., alſo die letzte s b = a u größer als a m oder b n. Folglich hat die Gerade a s Punkte wie s auf einer, und Punkte wie a, c, e, h auf der andern Seite der Geraden m n, alſo auch einen Punkt o mit ebendieſer gemein.

Wenn daher eine Gerade eine aus zwo Gleichlaufenden ſchneidet; ſo ſchneidet ſie auch die andere.

55. Wenn zwo Geraden o a und m n von einer dritten s r geſchnitten werden, und die Wechſelwinkel o a c und n c a ungleich ſind; ſo ſind o a und m n nicht gleichlaufend. Zieht man daher durch a die Gerade p q gleichlaufend mit m n; ſo ſchneidet o a eine p q aus zwo Gleichlaufenden, alſo muß o a auch die andere m n ſchneiden. F. 39.

Wenn man alſo was immer für zwo Geraden durch eine dritte ſchneidet; ſo ſind die Wechſelwinkel gleich oder ungleich. Im erſten Falle ſind die zwo Geraden gleichlaufend und im 2ten Falle ſchneiden ſie ſich.

Jede zwo Geraden ſind alſo gleichlaufend, oder ſie ſchneiden ſich in einem Punkte. Und daher ſind

jede zwo Geraden, welche ſich nirgends ſchneiden, gleichlaufend.

F. 40. 56. Iſt s r mit h g, und m n mit p q gleichlaufend, und s r ſchneidet eine aus zwo Gleichlaufenden m n; ſo muß s r auch die andere p q ſchneiden. Folglich werden die Gleichlaufenden p q und m n durch s r, und die Gleichlaufenden g h und s r durch p q geſchnitten, alſo die äußern und innern entgegengeſetzten Winkel y, b und k; u, a, und l; d, z, und f; c, x und e gleich ſeyn.

Wenn alſo zwo Geraden p q und g h, welche ſich ſchneiden, mit zwoen andern s r und m n, welche ſich auch ſchneiden, wechſelweiſe gleichlaufen; ſo ſind die Winkel, welche um einen Durchſchnitt liegen, den Winkeln, welche um den andern Durchſchnitt liegen, gleich.

F. 42. 57. Iſt die Sehne a b gleichlaufend mit e f, und man zieht den Halbmeſſer c d ſenkrecht auf eine a b; ſo iſt er auch ſenkrecht auf die andere e f; folglich iſt der Bogen d a = d b, und der Bogen d e = d f, alſo auch d e — d a oder a e = d f — d b oder b f.

Und iſt der Bogen a e = b f, und man halbirt den Bogen a b durch den Halbmeſſer c d; ſo iſt d a + a e oder d e = d b + b f oder d f, alſo der Halbmeſſer c d, welcher beede Bögen a d b und e d f halbirt, ſenkrecht auf beede Sehnen a b und e f; folglich ſind dieſe Sehnen gleichlaufend.

Wenn alſo zwo Sehnen gleichlaufen; ſo ſchließen ſie beederſeits gleiche Bögen ein: und ſchließen zwo Sehnen, ohne ſich innerhalb des Kreiſes zu ſchneiden, zween gleiche Bögen ein; ſo ſind ſie gleichlaufend.

F. 43. 44. 58. Iſt p q mit m n gleichlaufend, und Fig. 43. der Winkel p a b = p c d, oder Fig. 44. p a b = q c d, und man zieht die Senkrechten a r, und c r; ſo ſind die Winkel b a r und d c r gleich, weil ſie mit den gleich ge-

ſetz-

ſetzten Winkeln rechte Winkel ausmachen; alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke arb und crd eine Kathede und den anliegenden Winkel gleich; folglich ſind es auch die Hypothenuſen ab und cd.

Und ſind dieſelben Winkel wieder gleich, und ab gleich cd, und man zieht bo gleichlaufend mit ac; ſo iſt nach Vorigem ab = co; alſo auch, weil ab gleich cd geſetzet iſt, cd = co; folglich muß o mit d übereinkommen, und die Geraden bo und bd nur eine und dieſelbe Linie ausmachen, alſo bd mit ac gleichlaufen.

Wenn alſo zwo Geraden ab und cd zwiſchen zwo Gleichlaufenden unter gleichen Winkeln mit einer aus dieſen Gleichlaufenden gezogen ſind; ſo ſind jene Geraden ab und cd einander gleich. Und ſind zwo Geraden ab und cd, welche zwiſchen zwo andern Geraden ac und bd unter gleichen Winkeln mit einer aus dieſen gezogen ſind, einander gleich; ſo ſind dieſe ac und bd auch allemal gleichlaufend.

Iſt ferner ab mit cd gleichlaufend; ſo ſind der äußere Winkel pab und der innere entgegengeſetzte Winkel pcd gleich; alſo iſt ab = cd, ſo bald bd mit ac gleichläuft, und bd mit ac gleichlaufend, ſobald ab gleich cd iſt. F. 43.

Daher ſind die Gleichlaufenden zwiſchen zwo Gleichlaufenden gleich. Und ſind zwo Gleichlaufenden ab und cd gleich; ſo ſind auch die Geraden ac und bd, welche ihre Ende zuſammenhängen, gleichlaufend und gleich.

59. Wenn von einem Dreyecke ſoviel Stücke, Seiten oder Winkel, gegeben ſind, daß die Dreyecke, welche dieſe Stücke wechſelweiſe gleich haben, vollkommen gleich ſind; ſo iſt das Dreyeck beſtimmet, und kann allemal gezeichnet werden.

Denn ſind 1tens alle drey Seiten gegeben; ſo kann man aus einem Ende g der größten gb mit der mittlern gc einen Bogen beſchreiben, dieſen Bogen aus dem an- F. 31.

dern Ende b mit der kleinſten b c in einem Punkte c ſchneiden, und dann noch c g und c b ziehen.

Dieſe Zeichnung wird unmöglich, ſo bald die kleinſte b c nicht größer iſt als der Unterſcheid der zwo andern.

F. 31. Sind 2tens zwo Seiten und der eingeſchloſſene Winkel gegeben; ſo kann man den Winkel g c b dem gegebenen gleich machen, eine aus den gegebenen Seiten von c in g und die andere von c in b tragen, und ſodann noch g b ziehen.

Dieſe Zeichnung iſt allzeit möglich.

F. 31. Sind 3tens zwo Seiten und der Winkel, welcher der größern entgegenſteht, gegeben; ſo kann man den Winkel c b g dem gegebenen gleich machen, die kleinere auf einen Schenkel von b in c tragen, ſodann aus c mit der größern den andern Schenkel in g ſchneiden, und endlich noch c g ziehen.

Dieſe Zeichnung iſt allzeit möglich.

F. 31. Sind 4tens zwo Seiten und der Winkel, welcher der kleinern entgegenſteht, gegeben; ſo kann man den Winkel c g b dem gegebenen gleich machen, die größere auf einen Schenkel von g in c tragen, ſodann aus c mit der kleinern den andern Schenkel in b und s ſchneiden, und endlich noch c b oder c s ziehen, nachdem der Winkel, welcher der größern entgegenſteht, ſpitz oder ſtumpf ſeyn ſoll.

Dieſe Zeichnung wird unmöglich, ſo bald die kleinere c b aus den gegebenen Seiten kleiner als die Senkrechte c d iſt.

F. 31. Iſt 5tens eine Seite nebſt den zween anliegenden Winkeln gegeben; ſo kann man g b der gegebenen Seite gleich nehmen, den Winkel c g b dem einen und den Winkel c b g dem andern aus den gegebenen Winkeln gleich machen, und endlich die Schenkel dieſer Winkel verlängern, bis ſie in einem Punkte c zuſammen laufen.

Dieſe Zeichnung wird unmöglich, ſobald die gegebenen Winkel zuſammen 180 Grade oder über 180 Grade ausmachen. Denn im erſten Falle müßten die Schenkel g c und b c gleichlaufen, alſo einander nirgends, und im 2ten Falle

nur

nur auf der entgegengeſetzten Seite der Geraden g b in Anſehung der gezeichneten Winkel begegnen.

Iſt endlich 6tens eine Seite, ein anliegender und der entgegengeſetzte Winkel gegeben; ſo kann man den Winkel o n m dem anliegenden gleich machen, die gegebene Seite auf einen Schenkel von n in o tragen, ſodann aus jedem Punkte y des andern Schenkels n m einen Winkel x y n zeichnen, welcher dem entgegengeſetzten gleich iſt, und endlich noch durch o mit x y die Gleichlaufende o m ziehen. F.32.

Dieſe Zeichnung wird wieder unmöglich, wenn die Summe der gegebenen Winkel nicht unter 180 Grade iſt. Denn machten ſie zuſammen 180 Grade aus; ſo würde x y mit n o gleichlaufen, alſo n o mit o m nur eine und dieſelbe Linie ausmachen, und machten ſie mehr als 180 Grade aus; ſo müßte o m den Schenkel m n auf der entgegengeſetzten Seite in Anſehung des Punktes n ſchneiden.

Ebendieſe Zeichnungen laſſen ſich auch auf die rechtwinklichten und gleichſchenklichten Dreyecke anwenden, wenn ſoviel Stücke davon gegeben ſind, als das Dreyeck beſtimmen.

Wäre z. B. in einem gleichſchenklichten Dreyecke die Grundlinie nebſt dem entgegengeſetzten Winkel gegeben; ſo könnte man die Grundlinie a b durch die Senkrechte x d halbiren, den Winkel d x y der Hälfte des gegebenen gleich machen, und endlich b c gleichlaufend mit x y, und dann noch c a ziehen. Dieſe Zeichnung iſt allzeit möglich. F.26.

Anwendung.

60. Läßt man ein Bley a an einem Faden e a hängen, bis es ruht; ſo heißt die Gerade e a, welche der Faden vorſtellet, **Vertikallinie**; und jede auf eine Vertikallinie e a ſenkrechte Gerade c d wird **Horizontallinie** genennt. F.45.

Man ſoll eine gerade Linie zwiſchen zween Punkten a und b auf der Oberfläche der Erde meſſen, heißt nicht, man ſoll die Gerade a b, welche durch die zween Punkte a und b geht, ſondern die Horizontallinie c d, welche F.45.

von

von der Vertikalen ea bis an die Vertikale bd geht, meſſen.

Daher muß man die Klafterſtangen bey der wirklichen Ausmeſſung einer ſolchen Linie, ſoviel es dem Auge nach möglich iſt, Horizontal halten.

F. 46. Iſt die Sache von groſſer Wichtigkeit, und die Gerade ſehr genau zu meſſen; ſo bedienet man ſich der groſſen Meßſtangen Dieſe Stangen ſind drey oder vier Klafter lang, 4 Zoll breit und vier Zoll tief, von hartem trockenem Holze, und damit ſie ſich nicht werfen, aus mehrern Stücken mit verkehrtem Holzfaden zuſammengefüget: an beyden Enden mit einem Eiſen, welches bis 6 Zoll lang, 1 Zoll breit und 6 Linien dick, und durch drey vertikale Schraubennägel auf die Stange befeſtiget iſt, verſehen; damit man ſie deſto leichter an den Faden des Senkbleyes anſtoſſen, und bey abgeändertem Maße auch ihre Länge durch Rückung dieſer Schraubennägel nach Erforderniß abändern kann.

Die hölzernen Schragen, worauf dieſe Stangen geleget werden, haben drey Füße, deren einer ſich um eine Winde drehen läßt, damit man ſie auch auf ungleichem Grunde leicht aufrecht ſtellen kann, und ſind mit einem horizontalen Bretchen verſehen, welches ſich durch eine vertikale Schraube höher oder tiefer richten läßt. Endlich braucht man noch dabey die Schrottwage, ein gleichſchenklichtes Dreyeck, deſſen Grundlinie in zween gleiche Theile getheilet iſt, und in deſſen Scheitel ein Senkbley angebracht wird.

Die erſte Stange legt man auf zween dieſer hölzernen Schragen, dem Auge nach ſo über ab, daß der Stange erſtes End über den Punkt a fällt. Dann ſeßt man 1tens die Schrottwage auf, und ſchraubet eines der horizontalen Bretchen, worauf die Stange liegt, ſo lange höher oder tiefer, bis der Faden des Senkbleys die Grundlinie in dem angezeigten Punkte halbirt, richtet 2tens die Stange genau über die Gerade ab, und rücket endlich 3tens die Stange ſo lange vor- oder rückwärts, bis das Senkbley,

wel-

welches man an das etwas vorgehende Eiſen hält, gerad über den Punkt a fällt.

Iſt die erſte einmal gelegt; ſo legt man die 2te und jede folgende ebenſo über die Gerade a b, vermittelſt der Schrottwage horizontal und vermittelſt des Senkbleys an die letztgelegte an.

Zwo Stangen ſind auf das wenigſte vonnöthen, mehrere ſind darum beſſer, daß, wenn aus Verſehen an eine geſtoſſen worden iſt, allemal noch eine richtig liegt.

So oft man die hinterſte aufhebt, um ſie wieder an die vorderſte zu legen; ſo wird ſie mit einem Striche bezeichnet, damit man am Ende die Anzahl der Stangen verläßig zuſammenzählen kann.

Ueberdies bemerket man noch, welche die erſte, die zwote und dritte niedergelegt wird, damit man, ſo oft ſie wieder in der nämlichen Ordnung liegen, ſehen kann, ob alle gleichviele Striche haben. Denn wäre dieſes nicht; ſo könnte man ſicher ſchließen, daß ſie beym Aufheben unrichtig bezeichnet worden ſind.

61. Nimmt man auf den Schenkeln eines Winkels m o n, o a = o b, befeſtiget eine Kette a e in a, und eine gleiche b e in b, und zieht ihre Ende e in einen Punkt d zuſammen; ſo wird die Gerade d o den Winkel m o n halbiren. F. 47.

Befeſtiget man an beyden Enden einer nicht zu groſſen Geraden a b zwo gleiche Ketten a e und b e, und zieht ihre Ende in einen Punkt d auf einer Seite und in einen Punkt o auf der andern Seite zuſammen; ſo wird die Gerade a b durch o d in dem Durchſchnitte c halbirt. F. 47.

Stecket man aus den beyden Enden m und n einer gröſſern Geraden m n zween gleiche ſpitze Winkel o n m und o m n aus; ſo wird das Dreyeck m o n gleichſchenklicht: theilet man daher ferner den Winkel an der Spitze m o n durch die Gerade o c in zween gleiche; ſo wird auch die Gerade a b durch den Durchſchnitt c in zwo gleiche getheilt. F. 48.

Nimmt

F. 49. 50. Nimmt man in einer Geraden m n vermittelſt der Meßkette zween Punkte a und b an, welche gleichweit von o abſtehen, befeſtiget ſodann eine Kette a e in a und eine gleiche b e in b, und zieht die beyden Ende e dieſer Kette in einen Punkt d zuſammen; ſo wird die Gerade d o ſenkrecht auf die Gerade m n ſeyn

F. 51. Oefters iſt es in der Ausübung hinlänglich, daß man, um durch o auf m n eine Senkrechte d o zu ziehen, eine Klafterſtange längſt der Geraden m n anlegt, die Kette o d in o befeſtiget, und ſolange um o dreht, bis man urtheilt, daß d o mit m n zween gleiche Winkel macht.

F. 52. Zieht man durch jeden Punkt o, auf d e die Senkrechte o d, und durch jeden andern Punkt e der Geraden d e auf ebendieſelbe die Senkrechte e f = o d; ſo wird o f mit d e gleichlaufen.

Je weiter der Punkt e von d angenommen wird, deſto verläßiger iſt dieſe Ausſteckung. Denn nimmt man e ſehr nahe bey d an; ſo giebt ein geringer Fehler a b auf der Senkrechten e a einen größern c f auf der Senkrechten e f; dahingegen ein geringer Fehler c f auf der Senkrechten e f einen noch geringern a b auf der Senkrechten e a giebt.

F. 53. 62. Iſt durch einen entfernten Punkt o, a o gleichlaufend mit m n und o d ſenkrecht auf m n zu ziehen; ſo kann man in der Geraden m n einen beliebigen Punkt e annehmen, den Winkel e o a dem Winkel o e n gleich machen und dann noch o d ſenkrecht auf o a ziehen.

Wäre m n unzugängig; ſo kann man den Punkt e in deren Verlängerung annehmen und wie zuvor verfahren.

F. 54. Wenn durch einen Punkt m einer unzugängigen Geraden m n eine Senkrechte m d zu führen iſt; und wir ziehen e a ſenkrecht auf deren Verlängerung e m und a S ſenkrecht auf a e; ſo iſt a S gleichlaufend mit e m, alſo d m gleichlaufend mit a e, und folglich ſenkrecht auf e m; ſobald a d gleich e m iſt. Machen wir daher den Winkel a e d dem Winkel m a e gleich; ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke d e a und m a e, die Kathede e a gemein und die anliegenden ſpitzen Winkel gleich; folglich ſind es auch

die

die Katheden e m und a d; alſo iſt die Gerade d m ſenkrecht auf m n.

Sind durch einen unzugängigen Punkt o die Gerade o d F. 55. gleichlaufend mit m n, und o f ſenkrecht auf m n, zu ziehen, und man nimmt in der Geraden m n oder in deren Verlängerung, wenn ſie auch unzugängig iſt, zween Punkte a und b an, und ſtecket ein Dreyeck a b d aus, welches dem Dreyecke a b o vollkommen gleich iſt, indem man den Winkel a b d dem Winkel b a o und den Winkel b a d dem Winkel o b a gleich macht; ſo ſind die Geraden b d und a o gleich, und machen mit m n gleiche Winkel, alſo iſt d o mit m n gleichlaufend. Daher wird man nach voriger Methode den Punkt f der Senkrechten o f beſtimmen, wenn man durch b auf m n die Senkrechte b e zieht, und ſodann noch den Winkel b e f dem Winkel e b o gleich macht.

63. Iſt endlich eine Gerade a b unzugängig, und in F. 56. deren Verlängerung unſichtbar; und man ſtecket nach N. 30. ein Dreyeck d c e aus, welches dem Dreyecke a c b vollkommen gleich iſt; ſo werden d e und a b wegen der entgegengeſetzten gleichen Winkel bey c gleich, und, wegen der gleichen Wechſelwinkel e und a, gleichlaufend.

Zieht man daher 1tens c f gleichlaufend mit d e; ſo iſt c f auch gleichlaufend mit a b.

Zieht man 2tens c h ſenkrecht auf c f; ſo iſt auch c h ſenkrecht auf a b.

Zieht man 3tens durch c was immer für eine Gerade m k; ſo ſind die Dreyecke e c m und a c k wegen der gleichen Seiten a c und c e und der zween gleichen anliegenden Winkel vollkommen gleich; alſo iſt auch c k = c m und m e = a k.

Zieht man 4tens aus jedem Punkte k durch c die Gerade k m, und nimmt c l = g m = h k; ſo iſt l k mit c h gleichlaufend, alſo auch ſenkrecht auf a b.

Macht man endlich 5tens den Winkel o n f = c d g, nimmt n f = d g, und zieht f o ſenkrecht auf c f; ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke o n f und c d g eine

Ka-

Kathede und den anliegenden ſpitzen Winkel gleich; folglich iſt f o = c g = c h; alſo wird h o gleichlaufend mit c f und mit a b, und macht daher wegen des gemeinen Punktes h mit a b nur eine und dieſelbe Linie aus; folglich iſt o ein Punkt der verlängerten a b, und die Senkrechte, welche man durch o auf o f zieht, die Verlängerung derſelben.

Es läßt ſich alſo durch jeden Punkt c eine gleichlaufende mit a b führen, durch jeden Punkt c oder k eine Senkrechte auf a b ziehen, durch eine Gerade c k auf a b was immer für ein Stück a k von einer gegebenen Anzahl Klaftern abſchneiden, und endlich allzeit die Verlängerung o b der Geraden a b beſtimmen.

F. 57. 64. Iſt ein unzugängiger Winkel n o m in zween gleiche zu theilen, und man zieht durch jeden Punkt a der Verlängerten o n eine Gleichlaufende a d mit der Verlängerten m o, und theilt den Winkel o a d durch a b in zween gleiche, y und z; ſo ſind die Wechſelwinkel x und z gleich; alſo iſt auch x = y, folglich in dem Dreyecke o a b auch o a = o b. Macht man daher ferner den Winkel u = x; ſo iſt auch u = z, alſo d b = d a; folglich theilet d o den Winkel a o b, und den an der Spitze entgegengeſetzten m o n in zween gleiche.

F. 58. Iſt eine Gerade a b über eine Hinderniß, z. B. einen Baum zu verlängern, und man macht die Senkrechten a m und b n gleich; ſo iſt m n mit a b gleichlaufend. Nimmt man daher die Senkrechten p c und q d wieder den Senkrechten a m und b n gleich; ſo iſt c d die Verlängerung von a b. Denn b c iſt gleichlaufend mit m q, alſo auch mit a b und mit c d; folglich macht b c wegen der gemeinen Punkte b und c mit a b und c d nur eine und dieſelbe Gerade aus.

F. 59. Iſt eine Gerade a b durch einen Wald zu verlängern, ſo muß man daſſelbe verrichten, ſo oft ein Baum im Wege ſteht.

F. 60. Iſt endlich zwiſchen zween Punkten a und b durch einen Wald eine gerade Linie a b auszuſtecken, und man nimmt eine beliebige Gerade c d an, und zieht a c und b d ſenk-

recht

recht auf c d; ſo ſind a c und b d gleichlaufend. Nimmt man daher bn = a c; ſo iſt c n gleichlaufend mit a b; und zieht man b e ſenkrecht auf c n, und macht die Senkrechte f g = b e; ſo iſt g ein Punkt der Geraden a b; folglich können die Punkte k, m, p, r beſtimmet werden, da man wie zuvor b g verlängert, oder die Senkrechten h k, l m, o p, q r der Senkrechten e b gleich macht.

Von dem Maße der Winkel, welche ihren Scheitel nicht im Mittelpunkte haben.

66.

Wenn zwo Geraden a n und b m ſich in einem Punkte d ſchneiden, und man führet durch den Mittelpunkt c mit jenen die Gleichlaufenden h g und f e; ſo ſind die Winkel, welche um den Mittelpunkt c entſtehen, den Winkeln, welche um den Durchſchnitt d liegen, gleich. Da nun jeder Winkel beym Mittelpunkte den Bogen, worauf er ruhet, zum Maße hat; ſo wird man das Maß eines jeden Winkels a d b auf jedem Umfange angeben können, wenn man durch den Mittelpunkt mit den Schenkeln desſelben die Gleichlaufenden zieht. F.61.

In dieſem Falle iſt der Winkel a d b = h o b = h c f; alſo hat der Winkel a d b den Bogen h f zum Maße. Oder es iſt a d b = h f, und, weil h f = e g iſt, $a d b = \frac{h f + e g}{2}$; alſo, die gleichen Bögen, welche zwiſchen den Gleichlaufenden begriffen ſind, verwechſelt, und e m anſtatt b f, a h anſtatt g n geſetzt, $a d b = \frac{a b + m n}{2}$.

Und weil die Nebenwinkel a d b und b d n zuſammen 180 Grade ausmachen, alſo beede zuſammen der Hälfte

des ganzen Umfanges gleich ſind; ſo iſt auch $bdn = \frac{bn + am}{2}$.

F. 62. Drehet ſich die Gerade bm um den unbeweglichen Punkt b; ſo wird, indem ſich der Scheitel d dem Umfange gegen n nähert, der Bogen mn immer kleiner, und gleich o, ſobald d in den Punkt n des Umfanges kömmt, alſo kleiner als o oder verneinend, $= - np$, ſobald d in einem Punkt q außer dem Umfange tritt.

Da nun nach Vorigem $adb = \frac{ab + mn}{2}$ iſt, ſo iſt auch $anb = \frac{ab + o}{2} = \frac{ab}{2}$, und $aqb = \frac{ab - np}{2}$.

F. 63. Drehet ſich ferner der Schenkel sn des Winkels ans um den unbeweglichen Punkt n gegen der Tangente nd; ſo wird der Durchſchnitt b dem Berührungspunkte n immer näher kommen, und endlich mit n nur einen und denſelben Punkt ausmachen, ſobald sn mit der Tangente dn übereinkömmt. Da nun nach Vorigem $ans = \frac{ab}{2}$ iſt; ſo iſt auch $and = \frac{abn}{2}$; und ebenſo $ane = \frac{aon}{2}$.

F. 64. Drehet ſich endlich der Schenkel qb des Winkels aqb um den unbeweglichen Punkt q gegen der Tangente qd; ſo werden die Durchſchnitte b und p dem Berührungspunkte d immer näher, und endlich beede mit d übereinkommen, ſobald qb mit qd übereinkömmt;

Da nun $aqb = \frac{ab - np}{2}$ iſt; ſo iſt auch $aqd = \frac{ad - nd}{2}$; und

ebens.

ebenſo $aqe = \frac{ae - ne}{2}$, und

$$eqd = \frac{ead - end}{2}.$$

Daher hat der Winkel beym Umfange (er ſey von zwo Sehnen, oder von einer Sehne und einer Tangente formirt) den halben Bogen, der Winkel inner dem Kreiſe die halbe Summe der Bögen und der Winkel außer dem Kreiſe (er ſey von Sekanten oder Tangenten formirt) den halben Unterſcheid der Bögen, welche zwiſchen ihren Schenkeln begriffen ſind, zum Maße.

67. Nach der angezeigten allgemeinen Methode kann das Maß eines jeden aus dieſen Winkeln unmittelbar gefunden, und auch jedesmal aus dem einmal gefundenen Maße des einen auf das Maß aller übrigen geſchloſſen werden.

Iſt z. B. das Maß des Winkels ads, den die Tangente ds mit der Sehne ad macht, zu ſuchen, und man zieht zu dieſem Ende durch den Mittelpunkt c die Gerade bm gleichlaufend mit ds, und nq gleichlaufend mit ad; ſo iſt der Winkel $ads = aob = qcb$, alſo hat der Winkel ads den Bogen bq zum Maße. Oder es iſt $ads = bq$, F. 65.

und, weil $bq = mn$ iſt, $ads = \frac{bq + mn}{2}$, alſo, nd

anſtatt aq geſetzt, $ads = \frac{ab + md}{2}$, und, db anſtatt md geſetzt, $ads = \frac{ab + bd}{2}$, oder, $ads = \frac{abd}{2}$. Und weil adt mit ads 180 Grade ausmacht; ſo iſt auch $adt = \frac{amd}{2}$.

F. 66. Zieht man durch den Scheitel d eines jeden Winkels beym Umfange a d b die Tangente t s; ſo machen die drey Winkel a d t, a d b, und b d s zuſammen 180 Grade aus, und haben daher die Hälfte von dem ganzen Umfange zum Maße. Nun iſt nach Vorigem $adt = \frac{aed}{2}$ und $bds = \frac{bnd}{2}$; alſo iſt auch $adb = \frac{ab}{2}$.

Zieht man, um das Maß des Winkels a c f zu finden, d b gleichlaufend mit c f; ſo iſt $acf = adb = \frac{ab}{2}$, alſo, d e anſtatt b f geſetzt, $acf = \frac{af + de}{2}$.

Zieht man, um das Maß des Winkels a g n zu finden, wieder d b gleichlaufend mit g n; ſo iſt $agn = adb = \frac{ab}{2} = \frac{an - bn}{2}$, alſo, d m anſtatt b n geſetzt, $agn = \frac{an - dm}{2}$.

Und zieht man endlich, um den Winkel a q o, den die Sekante a q mit der Tangente q o macht, zu finden, wieder d b gleichlaufend mit q o; ſo iſt der Winkel $aqo = adb = \frac{ab}{2} = \frac{ao - bo}{2}$, alſo, o d anſtatt o b geſetzt, $aqo = \frac{ao - od}{2}$.

Folglich iſt wieder alles wie oben.

68. Hieraus folgt unmittelbar, 1tens daß jeder Winkel beym Umfange die Hälfte des Winkels beym Mittelpunkte iſt, wenn beyde auf demſelben oder gleichen Bögen ruhen. Ebendieſes gilt auch von dem ſtumpfen Winkel
F. 67. beym Umfange a d b, und den **Rückenwinkel** beym Mittelpunkt a c b, der mehr als 180° beträgt, und auf dem Bogen a n b ruhet. 2tens, daß alle Winkel beym Umfange, welche in demſelben oder gleichen Kreiſen auf dem-

demſelben oder gleichen Bögen ruhen, einander gleich ſind. 3tens, daß jeder Winkel beym Umfange einem rechten gleich; größer oder kleiner als ein rechter iſt, nachdem der Bogen, worauf er ruhet, dem Halbkreiſe gleich, größer oder kleiner als der Halbkreis iſt.

69. Weil der Winkel adb $= \frac{ab + mn}{2}$, der F.62. Winkel anb $= \frac{ab}{2}$, und der Winkel aqb $= \frac{ab - np}{2}$ iſt; ſo iſt jeder Winkel adb inner dem Kreiſe größer, und jeder Winkel aqb auſſer dem Kreiſe kleiner als der Winkel anb beym Umfange, wenn ſie auf demſelben Bogen ab ruhen. Und daher iſt jeder Winkel, welcher auf dem Halbkreiſe F.68. oder dem Durchmeſſer ruhet, ein rechter, ſtumpfer, oder ſpitzer, nachdem ſein Scheitel d in dem Umfange, e inner dem Kreiſe, oder f auſſer dem Kreiſe liegt. Folglich liegt der Scheitel d eines rechtwinklichten Dreyeckes adb allemal in dem Umfange, den man auf deſſen Hypothenuſe als dem Durchmeſſer beſchreibt. Und ein rechtwinklichtes Dreyeck adb von einer gegebenen Kathede bd wird auf einer gegebenen Hypothenuſe ab gezeichnet, wenn man auf dieſer einen Halbkreis beſchreibt, die gegebene Kathede als eine Sehne von b in d aufträgt, und ſodann noch die andere Kathede ad zieht. Und beſchreibt man aus einem beliebigen Punkte c durch das End d einer gegebenen Geraden ad einen Umfang, welcher die gegebene Gerade in einem Punkte a ſchneidet, zieht den Durchmeſſer ab und die Sehne db; ſo iſt db ſenkrecht auf ad

70. Zieht man durch den Berührungspunkt n einer F.69. Tangente no den Halbmeſſer cn; ſo iſt onc ein rechter Winkel, alſo n ein Punkt des Umfanges, den man auf dem Durchmeſſer oc beſchreibt.

Wenn daher durch einen Punkt o auſſer dem Kreiſe npm eine Tangente auf ebendieſen Kreis zu führen iſt, und man beſchreibt auf co als dem Durchmeſſer einen Um-

fang; ſo werden die Durchſchnitte n und m dieſer zween Umfänge die Berührungspunkte ſeyn. Denn, weil die Winkel o n c und o m c Winkel beym Umfange ſind, welche auf dem Durchmeſſer c o ruhen; ſo ſind es rechte Winkel, alſo die Geraden o n und o m ſenkrecht auf die Halbmeſſer c n und c m, folglich Tangenten zu dem Kreiſe m p n.

Durch jeden Punkt auſſer einem Kreiſe laſſen ſich alſo allemal zwo Tangenten auf ebendenſelben ziehen.

F. 70. 71. 71. Wenn m und n die Berührungspunkte einer Tangente m n zu zween Kreiſen ſind, und man zieht die Halbmeſſer m d und n c; ſo ſind dieſe Halbmeſſer ſenkrecht auf m n; alſo iſt die mit m n gleichlaufende c e auch ſenkrecht auf m d, folglich eine Tangente zu dem Kreiſe, den man aus d mit dem Halbmeſſer d e beſchreibt.

Sind alſo die Berührungspunkte m und n einer Tangente zu zween Kreiſen zu beſtimmen, und man beſchreibt aus dem Mittelpunkte d des größern mit d e Fig. 70. dem Unterſcheide und Fig. 71. der Summe beeder Halbmeſſer einen Kreis, und zieht ſodann aus c zu dieſem Kreiſe die Tagenten c e, die Halbmeſſer d e, und noch die Halbmeſſer c n gleichlaufend mit d e oder ſenkrecht auf c e; ſo werden dieſe Halbmeſſer d e und c n auf den gegebenen Kreiſen die Berührungspunkte m und n beſtimmen.

Zu jeden zween Kreiſen, welche keinen Punkt gemein haben, können alſo allemal vier gemeine Tangenten gezogen werden.

Wird Fig. 70. d e der Unterſcheid der Halbmeſſer immer kleiner; ſo wird die Gerade c e ſich der Geraden c d nähern, und mit dieſer nur eine und dieſelbe Linie ausmachen, ſobald d e gleich o wird; alſo müßen in dieſem Falle die Tangenten m n mit der Geraden c d gleichlaufen.

F. 72. Daher werden die Berührungspunkte m und n der zwo äuſſern gemeinen Tangenten in zween gleichen Kreiſen be-

beſtimmt, wenn man auf die Gerade, welche ihre Mittelpunkte verbindet, die ſenkrechten Durchmeſſer zieht.

72. Wenn ein Kreis npm die Schenkel eines Winkels mon berührt, und man zieht auf die Berührungspunkte m und n die Halbmeſſer cm und cn; ſo ſind dieſe gleich und ſenkrecht auf die Schenkel; alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke cmo und cno die Hypothenuſe und eine Kathede gleich, folglich ſind es auch die Winkel com und con, welche den gleichen Katheden entgegen ſtehen. Und ſind die Winkel com und con gleich, und man zieht aus jedem Punkte c der Geraden oc auf die Schenkel des Winkels mon die Senkrechten cm und cn; ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke cmo und cno die Hypothenuſe, und einen ſpitzen Winkel gleich, alſo ſind es auch die Katheden cm und cn, welche dieſen gleichen Winkeln entgegengeſetzet ſind. Beſchreibt man daher aus c mit dem Halbmeſſer cm einen Umfang, ſo muß dieſer auch durch den Punkt n gehen, und die auf die Halbmeſſer ſenkrechten Schenkel in m und n berühren. F.73.

Weil jeder Punkt c der Geraden oc für den Mittelpunkt eines Kreiſes, welcher mo und nc berühret, kann angenommen werden; ſo giebt es unendlich viele ſolche Kreiſe, welche die Schenkel eines Winkels berühren. Daher iſt die Aufgabe: **inner einem Winkel einen Kreis beſchreiben, welcher die Schenkel deſſelben berührt**, eine unbeſtimmte Aufgabe.

73. Wenn alle Punkte einer Linie, und nur die Punkte dieſer Linie einer unbeſtimmten Aufgabe ein Genügen leiſten; ſo heißt die Linie der **geometriſche Ort** der Aufgabe.

Die Gerade oc iſt alſo der geometriſche Ort jener unbeſtimmten Aufgabe.

Ebenſo wird die Senkrechte cd, welche eine Gerade ab halbirt, der geometriſche Ort, wenn man auf ab ein gleichſchenklichtes Dreyeck zeichnen, oder durch a und b einen Umfang führen ſoll; die Senkrechte cd, welche man durch d auf ab zieht, der geometriſche Ort, wenn F.26.

man einen Kreis, welcher a b in d berührt, beſchreiben ſoll;
F. 68. und der halbe Umfang, den man auf a b beſchreibt, der geometriſche Ort, wenn auf der Hypothenuſe ab ein rechtwinklichtes Dreyeck zu zeichnen iſt.

F. 73. 74. Setzet man, der Durchſchnitt o entferne ſich von dem Mittelpunkte c ohne Ende fort; ſo wird dieſer Durchſchnitt o nirgends mehr ſeyn, ſobald man c o unendlich groß ſetzet; folglich müßen in dieſem Falle die drey Geraden m o, c o und n o gleichlaufen, und die Senkrechten c m und c n nur eine und dieſelbe Linie ausmachen.

Wenn daher ein Kreis, welcher zwo gleichlaufende Geraden berühren ſoll, zu beſchreiben iſt; ſo wird die gleichlaufende dritte Gerade, welche von den gegebenen gleichweit abſteht, der geometriſche Ort der Aufgabe.

74. Setzet man zu der unbeſtimmten Aufgabe: **einen Kreis beſchreiben, welcher zwo gegebene Geraden berührt**, noch eine Bedingung hinzu; ſo wird ſie beſtimmet.

F. 75. 76. Iſt daher ein Kreis zu beſchreiben, welcher drey Geraden m o, n o und p q berührt, und man halbirt auf einer oder auf der andern Seite der Geraden p q die Winkel n q p und m p q durch q c und p c, und zieht auf die gegebenen Geraden die Senkrechten c m, c r und c n; ſo iſt nach Vorigem c m gleich c r, und c r gleich c n; alſo muß der Umfang, den man aus c mit dem Halbmeſſer c m beſchreibt, auch durch die Punkte r und n gehen, folglich die gegebenen Geraden in den Punkten m, r und n berühren.

Weil jeder dieſer Winkel n q p und m p q weniger als 180 Grade beträgt; ſo macht auch ihre halbe Summe c q p + c p q weniger als 180 Grade aus; folglich können die Geraden p c und q c nie gleichlaufen, ſondern müßen ſich allzeit in einem Punkte c ſchneiden.

So oft daher zwo Geraden von einer dritten geſchnitten werden; ſo läßt ſich allemal auf einer und auf der andern Seite dieſer dritten ein Kreis beſchreiben, welcher dieſe drey Geraden berührt.

Weil

Weil jede Seite eines Dreyeckes die zwo andern ſchneidet; ſo ſind allemal vier Kreiſe, drey außer und einer inner dem Dreyecke möglich, welche die drey Seiten deſſelben berühren.

Iſt anſtatt der dritten Seite der Berührungspunkt m F.73. gegeben, und man zieht m c ſenkrecht auf m o, halbirt den Winkel m o n durch o c; ſo wird die Senkrechte c n = c m; alſo muß der Kreis, den man aus c mit dem Halbmeſſer c m beſchreibt, auch durch den Punkt n gehen, und beede Schenkel in den Punkten m und n berühren.

Weil der Winkel n o m weniger als 180° beträgt; ſo hat deſſen Hälfte c o m weniger als 90°, alſo die Summe c o m + c m o weniger als 180°; folglich kann m c nie mit c o gleichlaufen, ſondern muß c o allzeit in einem Punkte c ſchneiden.

Iſt auch anſtatt der Tangente o n was immer für ein F.77. Punkt a des Umfanges gegeben, und man zieht m c ſenkrecht auf m o, und halbirt die Sehne a m durch die Senkrechte r c; ſo wird, weil c a gleich c m iſt, der Umfang, den man aus c mit dem Halbmeſſer c a beſchreibt, auch durch den Punkt m gehen, und m o in m berühren.

Weil der Winkel c m r kleiner als 90° iſt; ſo macht auch die Summe c m r + c r m weniger als 180 Grade aus; folglich muß es allemal ein Durchſchnitt c geben.

Iſt endlich nebſt den Punkten a und m auch anſtatt F.78. der Tangente m o noch ein Punkt b des Umfanges gegeben, und man halbirt m a und m b durch die Senkrechten r c und s c; ſo wird c a gleich c m, und c m gleich c b; alſo muß der Umfang, den man aus c mit dem Halbmeſſer c a beſchreibt, auch durch die Punkte m und b gehen.

Zieht man die Gerade r s; ſo wird ſie durch den Punkt m gehen oder nicht. Im erſten Falle liegen die drey gegebenen Punkte a, m und b in einer und derſelben Geraden, alſo ſind s c und r c ſenkrecht auf eine dritte, und können einander nirgends begegnen. Im zweyten Falle hat jeder dieſer Winkel c r s und c s r weniger als 90°, folglich ihre Summe c r s + c s r auch weniger

als 180°; alſo kann sc nie mit rc gleichlaufen, ſondern muß rc allzeit in einem Punkte c ſchneiden.

Der Kreis wird alſo durch drey Tangenten; durch eine Tangente, ihren Berührungspunkt, und was immer für eine andere Tangente; durch eine Tangente, ihren Berührungspunkt, und was immer für einen andern Punkt des Umfanges; oder durch jede drey Punkte des Umfanges beſtimmt, und kann in jedem Falle gezeichnet werden.

F. 75. 78. Nachdem der Umfang eines Kreiſes die drey Seiten eines Dreyeckes inner demſelben berühret, oder durch die drey Scheitel derſelben geht; ſo ſagt man, der Kreis ſey dem Dreyecke **ein- oder umgeſchrieben.**

Es läßt ſich alſo jedem Dreyecke ein Kreis ein- und umſchreiben.

Von den Winkeln geradlinigter Figuren.

75.

F. 78. Wenn man jedem Dreyecke amb einen Kreis umſchreibt; ſo hat jeder Winkel den halben Bogen, worauf er ruhet, alſo alle drey Winkel die Hälfte des ganzen Umfanges zum Maße.

Daher machen die drey Winkel eines jeden Dreyeckes zuſammen 180 Grade aus.

Wenn man alſo 1tens die Anzahl der Grade zweener Winkel eines jeden Dreyeckes von 180 abzieht; ſo findet man die Anzahl der Grade des dritten: und ebenſo giebt jeder Winkel eines Dreyeckes von 180 Grad abgezogen, die Summe der zween übrigen.

Wenn 2tens was immer für Dreyecke zween Winkel oder die Summe zweener Winkel gleich haben; ſo ſind es auch ihre dritten Winkel: und haben zwey Dreyecke einen Winkel gleich; ſo ſind es auch die Summen der zween übrigen.

End-

Endlich machen 3tens die zween ſpitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyeckes zuſammen allemal 90 Grade aus; und daher giebt die Anzahl der Grade eines jeden von 90 abgezogen die Anzahl der Grade des andern.

76. Wenn die Summe zweener Winkel 90 Grade beträgt; ſo wird einjeder das **Komplement** des andern genennt.

In einem rechtwinklichten Dreyecke iſt alſo ein ſpitzer Winkel allemal das Komplement des andern.

Ferner iſt das Komplement d c b eines ſpitzen Winkels a c d bejahend, und das Komplement e c b eines ſtumpfen Winkels a c e verneinend; und wird allemal gefunden, wenn man durch den Scheitel c auf den Schenkel a c des gegebenen Winkels die Senkrechte c b zieht. F. 79.

Iſt b c ſenkrecht auf a f, und d c a + e c a beträgt 180°; ſo iſt, weil e c a + e c f auch 180° ausmacht, d c a gleich e c f, alſo auch b c d gleich b c e.

Und iſt b c ſenkrecht auf a f, und b c d gleich b c e; ſo iſt auch d c a = e c f alſo d c a + a c e = 180°.

Daher haben zween Winkel, welche zuſammen 180° betragen, gleiche Komplemente: und ſobald ein ſtumpfer und ein ſpitzer Winkel gleiche Komplemente haben; ſo machen ſie auch allemal zuſammen 180° aus.

77. Zieht man c q ſenkrecht auf die Sehne a b; ſo hat der Winkel a d b den halben Bogen a e b, und der Winkel a e b den halben Bogen a d b, alſo beede Winkel zuſammen die Hälfte des ganzen Umfanges zum Maße; folglich machen ſie zuſammen 180° aus: ferner iſt der Winkel a d b $= \frac{acb}{2} =$ a c n. Es iſt aber c a n das Komplement des Winkels a c n; alſo iſt c a n auch das Komplement des Winkels a d b und des Winkels a e b. F. 80.

Daher iſt der Winkel, welchen eine Sehne mit dem Halbmeſſer macht, allemal das Komplement

ſo-

ſowohl der ſtumpfen als der ſpitzen Winkel beym Umfange, welche auf derſelben Sehne ruhen.

Soll daher ein Dreyeck a e b oder a d b, wovon eine Seite a b nebſt dem entgegengeſetzten Winkel e oder d gegeben iſt, gezeichnet werden, und man macht b a c und a b c dem Komplemente des gegebenen Winkels gleich, und beſchreibt aus c mit dem Halbmeſſer c a = c b einen Kreis; ſo wird, nachdem der gegebene Winkel ſpitz oder ſtumpf iſt, der größere Bogen a d b oder der kleinere a e b der geometriſche Ort der Aufgabe ſeyn.

F. 81. 78. Verlängert man eine Seite b c des Dreyeckes a b c; ſo heißt der Winkel u, den eine Seite a c mit der Verlängerung c d macht, der **äußere** Winkel des Dreyeckes a b c, und in Anſehung deſſen werden z und y die zween innern entgegengeſetzten genennt.

Weil $x + y + z = 180°$, und
$x + u = 180°$ iſt; ſo iſt auch
$x + y + z = x + u$, alſo
$y + z = u$.

Daher iſt der äußere Winkel eines Dreyeckes allemal der Summe der zween innern entgegengeſetzten gleich, und folglich größer als jeder aus dieſen.

Weil in jedem gleichſchenklichten Dreyecke zween Winkel gleich ſind; ſo findet man aus einem allemal auch jeden der zween übrigen: und weil in einem gleichſeitigen Dreyecke alle drey Winkel gleich ſind; ſo hat ein jeder 60 Grade.

F. 82. 79. Iſt ein halber Umfang durch die Punkte d und e in drey gleiche Theile getheilet, und man zieht die Halbmeſſer c d und c e, und die Sehnen b e, e d und d a; ſo hat jeder Winkel bey c 60°, alſo in jedem Dreyecke die Summe der zween übrigen Winkel 120°, folglich jeder Winkel, wegen der gleichen Seiten, der Halbmeſſer, 60°: alſo iſt jedes dieſer Dreyecke, wegen der gleichen Winkel, gleichſeitig.

Folg-

Folglich läßt ſich der Halbmeſſer eines jeden Kreiſes allemal genau 6mal als eine Sehne auf den Umfang tragen.

80. Iſt der Umfang eines Kreiſes in mehrere gleiche Theile getheilet, und man zieht durch alle Theilungspunkte, die Sehnen und die Tangenten; ſo erhält man 1tens jeden Winkel g a b, den zwo Sehnen im Umfange machen, wenn man von dem ganzen Umfange zween der gleichen Theile abzieht, und den Unterſcheid durch 2 dividirt; 2tens jeden Winkel g m a, den zwo Tangenten außer dem Kreiſe machen, wenn man von dem ganzen Umfange weniger einem Theile, noch einen Theil, oder wieder von dem ganzen Umfange zween der gleichen Theile abzieht, und den Unterſcheid durch 2 dividirt; endlich 3tens jeden Winkel m g a oder m a g, den eine Tangente mit einer Sehne macht, wenn man einen aus den gleichen Theilen des Umfanges durch 2 dividirt. Folglich ſind alle Winkel, welche von zwo Sehnen, alle, welche von zwo Tagenten, und alle, welche von einer Tangente und einer Sehne formiret werden, gleich. Ferner ſind alle Sehnen, weil ſie zu gleichen Bögen gehören, gleich; und ebendaher ſind alle Dreyecke g m a, a n b u. ſ. f. gleichſcheuklicht und vollkommen gleich, folglich ſind es auch die Seiten g m, m a, a n, n b, b o u. ſ. f., alſo auch die Summen aus je zwo derſelben a m + a n, n b + b o oder die Tangenten m n, n o, u. ſ. f. F. 83.

Wenn eine Ebene in mehrere gerade Linien, welche lauter auswärtsgehende Winkel machen, eingeſchloſſen iſt, wie a b d e f g oder m n o p q r; ſo heißt ſie überhaupt **Vieleck**, und insbeſondere **Drey**= **Vier**= **Fünf**= oder n **eck**, nachdem ſie 3, 4, 5 oder n Seiten hat.

Jedes Vieleck hat alle Seiten und alle Winkel gleich oder nicht: im erſten Falle wird es ein **ordentliches**, und im zweyten Falle ein **unordentliches** Vieleck genennt.

Wenn alſo ein Umfang in mehrere gleiche Theile eingetheilet iſt, und man zieht durch alle Theilungspunkte die

Seh-

Sehnen und Tangenten; ſo wird dem Kreiſe ein ordentliches Vieleck, welches ebenſoviel Seiten als der Umfang Theile hat, ein- und umgeſchrieben.

Zieht man in jedem Kreiſe zween aufeinander ſenkrechte Durchmeſſer, und theilt jeden Bogen immer wieder in zween gleiche; ſo wird der Umfang in 4, in 8, in 16, in 32 u. ſ. f. gleiche Theile getheilet. Und trägt man den Halbmeſſer 6mal auf den Umfang, und theilt jeden Bogen immer wieder in zween gleiche; ſo wird der Umfang in 6, in 12, in 24, in 48 u. ſ. f. gleiche Theile getheilt. Ein Umfang läßt ſich alſo in jede Anzahl gleicher Theile, welche eine Potenz von 2, oder ein Produkt aus 6 in eine Potenz von 2 iſt, theilen.

Folglich kann auch jedes ordentliche Vieleck, deſſen Anzahl der Seiten eine Potenz von 2 oder ein Produkt aus 6 in eine Potenz von 2 iſt, einem gegebenen Kreiſe ein- und umgeſchrieben werden.

F. 84. 81. Weil in einem ordentlichen Vielecke a b d e f alle Winkel gleich ſind; ſo ſind es auch ihre Hälften. Halbirt man daher zween Winkel a und b durch die Geraden a c und b c; ſo iſt in dem Dreyecke a c b, wegen der gleichen Winkel a und b, auch die Seite a c gleich b c: und zieht man c d; ſo haben die Dreyecke a c b und b c d die Seite b c gemein, b a gleich b d und den eingeſchloſſenen Winkel c b a gleich c b d; folglich iſt auch c d gleich c b. Daher ſind alle die Geraden c a, c b, c d, c e, c f einander gleich.

Zieht man ferner aus c die Senkrechten c m, c n, c o, c p, c q; ſo halbiren dieſe die Grundlinien der gleichſchenklichten Dreyecke a b c, b d c u. ſ. f.; alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke c n b und c o b die Hypothenuſe c b gemein, und die Kathede b n gleich b o; folglich ſind auch die Senkrechten c n, c o, c p, c q, c m gleich.

Beſchreibt man daher aus c mit dem Halbmeſſer c a einen Kreis; ſo wird deſſen Umfang auch durch die Scheitel

tel b, d, e, f gehen: und beſchreibt man mit dem Halbmeſſer cn einen Kreis; ſo muß deſſen Umfang auch durch die Punkte o, p, q, m gehen, und die Seiten des Vieleckes in ebendieſen Punkten berühren.

Es kann alſo in jedem ordentlichen Vielecke der Mittelpunkt c gefunden, und demſelben ein Kreis ein- und umgeſchrieben werden.

82. Zieht man aus jedem Punkte o inner einem Vielecke in alle Scheitel deſſelben die Geraden oa, ob, oc, od, oe; ſo wird das Vieleck in ſoviele Dreyecke, als es Seiten hat, eingetheilt. Alſo macht die Summe aller Winkel aller dieſer Dreyecke ſovielmal 180 Grade aus, als das Vieleck Seiten hat. Zieht man nun die Summe der Winkel, welche um den Punkt o liegen und allzeit 2mal 180° betragen, von jener Summe ab; ſo bleibt die Summe aller Winkel des Vieleckes. F. 85.

Daher erhält man die Summe aller Winkel eines jeden Vieleckes, wenn man 180° mit der Anzahl der Seiten weniger zwey multiplicirt; und jeden Winkel in einem ordentlichen Vielecke, wenn man 180° mit der Anzahl der Seiten weniger zwey multiplicirt, und das Produkt wieder durch die Anzahl der Seiten dividirt.

Dieſemnach wird die Summe aller Winkel

in einem Sechsecke $= 4 \times 180° = 720°$.

in einem Fünfecke $= 3 \times 180° = 540°$.

in einem Vierecke $= 2 \times 180° = 360°$.

in einem Dreyecke $= 1 \times 180° = 180°$.

und jeder Winkel

in einem ordentlichen Sechsecke $= \frac{4 \times 180°}{6} = 120°$.

in einem ordentlichen Fünfecke $= \frac{3 \times 180°}{5} = 108°$.

in einem ordentlichen Viereche $= \frac{2 \times 180°}{4} = 90°$.

in einem ordentlichen Dreyecke $= \frac{1 \times 180°}{3} = 60°$.

F. 85. Verlängert man jede Seite eines Vielecks gegen der folgenden; ſo macht jeder äußere Winkel edq mit ſeinem innern Nebenwinkel edc 180° aus; alſo beträgt die Summe aller innern und die Summe aller äußern Winkel ſo vielmal 180°, als Seiten ſind: die Summe aller innern aber macht ſovielmal 180° aus, als Seiten ſind weniger zwey; alſo beträgt in jedem Vielecke die Summe aller äußern Winkel 2mal 180 oder 360°.

Daher findet man in einem ordentlichen Vielecke jeden äußern Winkel, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt; und dann auch jeden innern Winkel, wenn man den äußern von 180° abzieht.

Dieſemnach wird

in einem ordentlichen Sechsecke

der äußere Winkel $= \frac{360°}{6} = 60°$,

und der innere $180 - 60 = 120°$;

in einem ordentlichen Fünfecke

der äußere Winkel $= \frac{360}{5} = 72°$,

und der innere $= 180 - 72 = 108°$;

in einem ordentlichen Vierecke

der äußere Winkel $= \frac{360}{4} = 90°$,

und der innere $= 180 - 90 = 90°$;

in einem ordentlichen Dreyecke

der äußere Winkel $= \frac{360}{3} = 120°$,

und der innere $= 180 - 120 = 60°$.

Von

Von dem Vierecke.

83.

Iſt was immer für ein Viereck a b d e einem Kreiſe eingeſchrieben; ſo hat der Winkel a den halben Bogen b d e und der Winkel d den halben Bogen b a e, alſo jede zween entgegengeſetzten Winkel a und d die Hälfte des ganzen Umfanges zum Maße. F. 86.

Daher machen die entgegengeſetzten Winkel eines Viereckes, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, allemal 180° aus.

Wenn die entgegengeſetzten Winkel eines Viereckes a b d e 180° ausmachen, und man führet durch die Punkte e, a und b einen Umfang; ſo wird dieſer die Gerade e d in einem Punkte n ſchneiden, alſo das Viereck e a b n dem Kreiſe eingeſchrieben ſeyn, folglich die Winkel a + n 180° betragen. Da nun nach der Vorausſetzung a + d auch 180° beträgt; ſo iſt a + n = a + d alſo d = n. Folglich ſind die Geraden b n und b d gleichlaufend, und machen wegen des gemeinen Punktes b nur eine und dieſelbe Linie, und daher die Punkte d und n nur einen und denſelben Punkt aus. F. 86.

Betragen alſo die entgegengeſetzten Winkel eines Viereckes 180°; ſo kann demſelben allemal ein Kreis umgeſchrieben werden.

84. Zieht man in jedem Vierecke, das einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, durch die Scheitel der entgegengeſetzten Winkel die Geraden a d und b e (**die Diagonalen**); ſo ruhen die Winkel beym Umfange a d e und a b e, a d b und a e b, d a e und d b e, d a b und d e b auf dem nämlichen Bogen; alſo ſind ſie gleich. F. 87.

Daher machen in jedem Vierecke, das einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, die zwo Diagonalen mit jeden zwo entgegengeſetzten Seiten gleiche Winkel.

F. 87. Iſt in jedem Vierecke a b d e der Winkel b a d dem Winkel b e d gleich, und man führet durch die Punkte e, a und b einen Umfang; ſo wird dieſer die Diagonale a d in einem Punkte n ſchneiden, alſo das Viereck e a b n einem Kreiſe eingeſchrieben, folglich der Winkel b a n oder b a d dem Winkel b e n gleich ſeyn. Es iſt aber nach der Vorausſetzung der Winkel b a d dem Winkel b e d gleich; alſo iſt auch der Winkel b e n = b e d; folglich macht der Schenkel e n mit dem Schenkel e d nur eine und dieſelbe Linie, und daher der Punkt n mit d nur einen und denſelben Punkt aus.

Wenn alſo in jedem Vierecke die zwo Diagonalen mit zwo entgegengeſetzten Seiten gleiche Winkel machen; ſo kann das Viereck allemal einem Kreiſe eingeſchrieben werden.

F. 88. 85. Nachdem in einem Vierecke keine Seiten, nur
89. zwo entgegengeſetzte Seiten, oder jede zwo entgegengeſetzten
90. Seiten gleichlaufend ſind: ſo wird das Viereck a c d b
91. Fig. 88. **Trapezoid** Fig. 89, **Trapez**, oder Fig.
92. 90. 91. 92. und 93. **Parallelogramm** genennt.
93. Weil die Gleichlaufenden zwiſchen zwo Gleichlaufenden gleich ſind; ſo iſt Fig. 90. 91. 92. und 93. a b gleich c d und a c gleich b d. Und weil die innern entgegengeſetzten Winkel zwiſchen zwo Gleichlaufenden 180° ausmachen; ſo iſt der Winkel a + c = a + b, alſo der Winkel c = b, und ebenſo der Winkel c + a = c + d, alſo der Winkel a = d.

In jedem Parallelogramme ſind alſo die entgegengeſetzten Seiten, und die entgegengeſetzten Winkel gleich.

Nachdem daher ein Parallelogramm Fig. 90. und 91. einen rechten oder Fig. 92. und 93. einen ſchiefen Winkel hat; ſo ſind alle vier Winkel rechte oder alle vier ſchiefe. Im erſten Falle wird es ein **rechtwinklichtes**, und im zweyten Falle ein **ſchiefwinklichtes** Parallelogramm genennt.

Das

Das rechtwinklichte oder das ſchiefwinklichte Parallelogramm hat Fig. 90. und 92. alle vier Seiten oder Fig. 91. und 93. nur jede zwo entgegengeſetzten gleich. Das rechtwinklichte heißt im erſten Falle **Quadrat**, und im zweyten **Rechteck**, und das ſchiefwinklichte im erſten Falle **Raute**, und im zweyten **länglichte Raute**.

86. Hänget man die Ende zwoer gleichen und gleich- F. 90.
laufenden Geraden a b und c d durch zwo andere Geraden 91.
a c und b d zuſammen; ſo ſind auch dieſe gleich und gleich- 92.
laufend. 93.

Daher iſt jedes Viereck, deſſen zwo entgegengeſetzte Seiten gleich und gleichlaufend ſind, ein Parallelogramm.

Hat ein Viereck jede zwo entgegengeſetzten Seiten gleich, und man zieht die Diagonale c b; ſo haben die Dreyecke b d c und b a c wegen der gemeinen Seite b c alle drey Seiten gleich; folglich ſind es auch die Winkel y, welche den gleichen Seiten a b und c d entgegenſtehen, und die Winkel x, welche den gleichen Seiten a c und b d entgegengeſetzet ſind. Die Winkel y aber und die Winkel x ſind Wechſelwinkel; alſo iſt a c mit b d, und a b mit c d gleichlaufend.

Daher iſt jedes Viereck, welches jede zwo entgegengeſetzten Seiten gleich hat, ein Parallelogramm.

87. Zieht man in jedem Parallelogramme die Dia- F. 90.
gonale b c; ſo haben die Dreyecke b d c und b a c wieder 91.
alle drey Seiten gleich; alſo ſind ſie vollkommen gleich. 92.

Die Diagonale theilet daher jedes Parallelo- 93.
gramm allemal in zwey vollkommen gleiche Dreyecke.

88. Zieht man ferner auch die Diagonale a d; ſo haben die Dreyecke a o b und c o d die Seiten a b und c d die Winkel x und die Winkel u gleich; alſo ſind es auch die Seiten o a und o d, o b und o c.

Daher wird in jedem Parallelogramme eine Diagonale durch die andere halbirt.

F. 90. 91. In dem rechtwinklichten Parallelogramme haben ferner die rechtwinklichten Dreyecke a c d und b d c die Kathede c d gemein, und a c gleich b d; folglich ſind auch die Hypothenuſen a d und c b, und deren Hälften o a, o b, o d und o c gleich.

Jedes rechtwinklichte Parallelogramm hat alſo zwo gleiche Diagonalen, und kann allemal einem Kreiſe eingeſchrieben werden.

F. 94. 89. Nimmt man auf zwo Geraden a d und c b, welche ſich in einem Punkte o ſchneiden, o a = o b = o d = o c, und zieht a b, b d, d c und c a; ſo ſind die Dreyecke a o c und b o d, a o b und c o d gleichſchenklicht, und wegen der bey o gleichen Winkel, vollkommen gleich; alſo ſind auch die vier Winkel x und die vier Winkel y gleich. Jeder Winkel des Viereckes aber iſt der Summe x + y gleich; alſo hat das Viereck vier gleiche Winkel, folglich iſt jeder $= \frac{360}{4} = 90°$, und daher das Viereck ein rechtwinklichtes Parallelogramm.

Nach dieſer Methode kann auf einem Bogen Papier m n q p ſehr leicht und verläßig ein Rechteck gezeichnet werden, deſſen Seiten bis an den Rand deſſelben fallen.

F. 95. 96. 97. 90. Iſt a c d b ein rechtwinklichtes und e c d f ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm; ſo ſind in den rechtwinklichten Dreyecken a c e und b d f die Katheden a c und b d, und die Hypothenuſen e c und f d gleich; alſo ſind es auch die Dreyecke a c e und b d f. Addirt man nun zu beyden Fig. 95. das Trapez e c d b, und Fig. 96. das Dreyeck b c d, und zieht Fig. 97. das gemeine Dreyeck b o c von beyden ab, und addirt zu den gleichen Reſten, zu den Trapezen a c o b, und e o d f wieder das Dreyeck o c d; ſo erhält man in jedem Falle das rechtwinklichte Pa-

Parallelogramm acdb auf einer, und das ſchiefwinklichte ecdf auf der andern Seite.

Wenn alſo ein rechtwinklichtes und ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm zwiſchen zwo Gleichlaufenden cd und af, und auf derſelben Grundlinie cd ſtehen; ſo ſind ſie ihrem Flächeninhalte nach gleich.

Von der Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren.

91.

Nachdem ein Quadrat eine Klafter, einen Schuh, einen Zoll ꝛc. zur Seite hat; ſo heißt es **Quadratklafter, Quadratſchuh, Quadratzoll** ꝛc.

Dieſes ſind die Maße, nach welchen man die Flächeninhalte beſtimmt.

92. Wenn man was immer für eine Seite eines Parallelogramms oder eines Dreyeckes zur Grundlinie annimmt, und zieht von jedem Punkte der entgegengeſetzten Seite des Parallelogramms, oder von dem entgegengeſetzten Scheitel des Dreyeckes auf die Grundlinie eine Senkrechte; ſo heißt dieſe Senkrechte die **Höhe** des Parallelogramms oder des Dreyeckes.

93. Setzet man die Grundlinie cd und die Höhe ac Fig. 100. eines rechtwinklichten Parallelogramms ſeyen genau in Klaftern eingetheilt, und durch alle Theilungspunkte der Grundlinie mit der Höhe, und durch alle Theilungspunkte der Höhe mit der Grundlinie die Gleichlaufenden gezogen: ſo wird jedes Rechteck, deſſen Höhe eine Klafter iſt, wie ecdf, gefh, kghl, aklb, ſoviele Quadratklaftern, als die Grundlinie cd Klaftern hat, enthalten; und das rechtwinklichte Parallelogramm wieder aus ſoviel dergleichen Rechtecken, als die Höhe ac Klaftern hat, beſtehen. Hat

 die

die Grundlinie a Klaſter und die Höhe b Klaſter; ſo wird jedes Rechteck, wie e c d f, a Quadratklaſter und das rechtwinklichte Parallelogramm b ſolche Rechtecke, folglich b mal a oder a b Quadratklaſter enthalten.

Hätte die Grundlinie des rechtwinklichten Parallelogramms a, und deſſen Höhe b Schuh oder Zoll; ſo würde das Parallelogramm ebenfalls a b Quadratſchuh oder a b Quadratzoll enthalten.

Man erhält alſo die Anzahl der Quadratklaftern, der Quadratſchuhe oder der Quadratzolle eines rechtwinklichten Parallelogramms, wenn man die Anzahl der Klaftern, der Schuhe oder der Zolle der Grundlinie mit der Anzahl der Klaftern, der Schuhe oder der Zolle der Höhe multipliciret.

Fig. 101. Weil die Grundlinie einer Quadratklaſter a b c d 6 Schuh und die Höhe deſſelben auch 6 Schuh hat; ſo enthält eine Quadratklaſter a c d b 6mal 6 oder 36 Quadratſchuh, und aus ähnlichem Grunde der Quadratſchuh 12mal 12 oder 144 Quadratzoll, der Quadratzoll 144 Quadratlinien und die Quadratlinie 144 Quadratpunkte ꝛc.

Fig. 102. 94. Theilet man die Grundlinie c d einer Quadratklaſter a c d b in 6 gleiche Theile, und zieht durch alle Theilungspunkte die Gleichlaufenden mit der Höhe a c; ſo wird die Quadratklaſter in 6 gleiche Rechtecke, wovon ein jedes eine Klaſter lang und ein Schuh hoch iſt, eingetheilt. Ein ſolches Rechteck heißt **Klafterſchuh**, und iſt der 6te Theil einer Quadratklaſter. Theilt man den Schuh der Grundlinie wieder in 12 Zoll ein, und zieht durch alle Theilungspunkte die Gleichlaufenden mit der Höhe a c; ſo wird der Klafterſchuh in 12 **Klafterzoll** eingetheilt. Ebenſo theilt man den Klafterzoll in 12 **Klafterlinien**, die Klafterlinien in 12 **Klafterpunkte** u. ſ. f.

Fig. 103. 95. Theilet man die Grundlinie c d eines Quadratſchuhs in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Punkte u. ſ. f., und zieht durch alle Theilungspunkte

die

die Gleichlaufenden mit der Höhe a c; ſo wird der Quadratſchuh in 12 **Schuhzoll**, der Schuhzoll in 12 **Schuhlinien**, die Schuhlinie in 12 **Schuhpunkte** eingetheilt.

Ebenſo theilt man den Quadratzoll in 12 **Zolllinien**, die Zollinie in 12 **Zollpunkte** u. ſ. f.

96. Iſt von dem rechtwinklichten Parallelogramme acdb die Grundlinie cd = 3° 2′ 3″ Fig. 105.
die Höhe ac = 2° 1′ 4″,
und man multiplicirt die Grundlinie mit der Höhe nach den Regeln, welche man für die Multiplication mit genannten Zahlen in der allgemeinen Rechenkunſt feſtgeſetzet hat: ſo giebt

1tens 3″ × 2, 6 Klafterzoll, das Rechteck dkhl
2′ × 2, 4 Klafterſchuh, das Rechteck lhfg
3° × 2, 6 Quadratklafter, das Rechteck gfec,

ſodann iſt

mefn $\frac{1}{6}$ von eqrf, oder von 3 Quadratklafter,
nfho $\frac{1}{6}$ von frsh, oder von 2 Klafterſchuh,
ohkp $\frac{1}{6}$ von hstk, oder von 3 Klafterzoll.

Endlich iſt amnx $\frac{1}{3}$ von mefn
xnoy $\frac{1}{3}$ von nfho und
yopb $\frac{1}{3}$ von ohkp.

Und iſt die Grundlinie cd = 3′ 2″ 3‴
die Höhe ac = 2′ 1″ 4‴

ſo giebt 1tens 3‴ × 2, 6 Schuhlinien, das Rechteck dkhl
2″ × 2, 4 Schuhzoll, das Rechteck lhfg
3′ × 2, 6 Quadratſchuh, das Rechteck gfec,

ſodann iſt mefn $\frac{1}{12}$ von eqrf, oder von 3 Quadratſchuh,
nfho $\frac{1}{12}$ von frsh, oder von 2 Schuhzoll,
ohkp $\frac{1}{12}$ von hstk, oder von 3 Schuhlinien.

Endlich iſt amnx $\frac{1}{3}$ von mefn
xnoy $\frac{1}{3}$ von nfho und
yopb $\frac{1}{3}$ von ohkp.

Wenn man alſo den Flächeninhalt eines Rechteckes nach jenen Regeln in Klaftern berechnet; ſo muß man unter Klafter, Schuh, Zoll, Linien, Punkten ꝛc. des Pro-

duktes Quadratklafter, Klafterſchuh, Klafterzoll, Klafterlinien, Klafterpuncte ꝛc. verſtehen. Und berechnet man den Flächeninhalt in Schuhen; ſo ſind die Schuh, Zoll, Linien und Punkte des Produktes Quadratſchuh, Schuhzoll, Schuhlinien und Schuhpunkte. Endlich werden die Zoll, Linien und Punkte des Produktes Quadratzoll, Zolllinien und Zollpunkte ſeyn, wenn man den Flächeninhalt in Zollen berechnet.

F. 95. 96. 97. 97. Zieht man durch die Ende der Grundlinie c d eines ſchiefen Parallelogramms e c d f die Senkrechten d b und c a: ſo wird das rechtwinklichte Parallelogramm a c d b dem ſchiefen e c d f gleich. Der Flächeninhalt des rechtwinklichten aber iſt das Produkt aus c d in d b; alſo iſt auch der Flächeninhalt des ſchiefen das Produkt aus c d in d b.

Daher iſt der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe desſelben.

F. 98. 98. Zieht man durch die Scheitel a und d des Dreyeckes a d c die Gerade a b gleichlaufend mit c d, b d gleichlaufend mit a c, und a n ſenkrecht auf c d; ſo iſt das Dreyeck a d c die Hälfte des Parallelogramms a b d c. Der Flächeninhalt des Parallelogramms a b d c aber iſt das Produkt aus c d in a n; alſo iſt der Flächeninhalt des Dreyeckes a d c die Hälfte des Produkts aus c d in a n.

Daher iſt der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes das Produkt aus der Grundlinie in die halbe Höhe, oder das Produkt aus der Höhe in die halbe Grundlinie desſelben.

Fig. 106. 99. Soll man nun den Flächeninhalt von was immer für einer geradlinichten Figur berechnen; ſo kann man ſie in Dreyecke eintheilen, den Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ſuchen, die Flächeninhalte aller Dreyecke zuſammen addiren, und ſo den Flächeninhalt der ganzen Figur finden.

Iſt

Iſt die gegebene Figur nicht geradlinigt, ſo ſtecket Fig. 107.
man eine geradlinigte aus, welche der gegebenen dem Auge
nach gleich iſt, und berechnet dieſe.

Iſt die gegebene Figur nur von außen zugängig, wie Fig. 108. 109.
ein Teich oder ein Wald; ſo ſtecket man um dieſelbe ein
Rechteck aus, und zieht von deſſen Inhalte den Inhalt
aller äußern Dreyecke ab.

100. Zieht man in einem Trapeze acdb die Diagonale cb, ſodann be ſenkrecht auf cd, und cf ſenkrecht auf ab; ſo iſt das Dreyeck cba $= \frac{ab \times cf}{2} = \frac{ab \times be}{2}$, und F. 99.

das Dreyeck cbd $= \frac{cd \times be}{2}$,

alſo das Trapez acdb $= \frac{ab \times be}{2} + \frac{cd \times be}{2}$

$$= \frac{ab + cd}{2} \times be.$$

Daher iſt der Flächeninhalt eines Trapezes das Produkt aus der halben Summe beeder Gleichlaufenden in die Entfernung derſelben.

Halbirt man ca in m, und zieht mn gleichlaufend mit cd, ſodann aq und mp gleichlaufend mit bd; ſo haben die Dreyecke amo und mcp, die Seiten am und cm, die Winkel amo und mcp, und die Winkel mao und cmp gleich; alſo ſind es auch die Seiten mo und cp; mo aber iſt auch gleich pq; alſo iſt mo $= \frac{cq}{2}$; und

on iſt $= ab = qd = \frac{ab + qd}{2}$;

folglich iſt auch mn $= \frac{ab + qd + cq}{2} = \frac{ab + cd}{2}$.

Es iſt aber das Trapez acdb $= \frac{ab + cd}{2} \times be$;
alſo iſt das Trapez acdb $= mn \times be$.

Daher iſt auch der Flächeninhalt eines Trapezes das Produkt aus der Entfernung beeder gleichlaufenden Seiten in die Gleichlaufende, welche eine der nicht gleichlaufenden Seiten halbirt.

Fig. 104. 101. Wenn man aus dem Mittelpunkte c eines ordentlichen Vieleckes abdefg in alle Scheitel deſſelben gerade Linien führet; ſo wird das Vieleck in ebenſoviel vollkommen gleiche Dreyecke eingetheilt, als daſſelbe Seiten hat. Der Flächeninhalt eines jeden acb dieſer Dreyecke iſt aber das Produkt aus der halben Seite ab in die Höhe cx; folglich iſt der Flächeninhalt aller Dreyecke oder des Vieleckes das Produkt aus der halben Summe aller Seiten, oder aus dem halben Perimeter, in die Höhe cx.

102. Iſt einem Kreiſe ein ordentliches Vieleck abdefg eingeſchrieben, und man halbirt alle Seiten deſſelben durch die Halbmeſſer cy, cz &c. und zieht durch deren äuſſerſte Punkte die Tangenten; ſo wird dem Kreiſe auch ein ordentliches Vieleck mnopqr umgeſchrieben.

Zieht man nun mc; ſo iſt wegen der vollkommen gleichen Dreyecke mcy und mcz der Winkel mcy = mcz: und zieht man ac; ſo iſt wegen der vollkommen gleichen Dreyecke acx und acu der Winkel acx = acu; alſo halbirt ſowohl die Gerade mc, als die Gerade ac den Winkel ucx; folglich machen mc und ac nur eine und dieſelbe Linie aus. Alſo gehen die Halbmeſſer ca, cb &c. allemal auch durch die Scheitel m, n, &c.

Der Unterſcheid jeder zwey Dreyecke acb und mcn iſt alſo das Trapez abnm, und der Unterſcheid des eingeſchriebenen und des umgeſchriebenen Vieleckes iſt die Summe aller dieſer vollkommen gleichen Trapeze. Der Flächeninhalt eines jeden Trapezes iſt die halbe Summe der Gleichlaufenden in ihre Entfernung xy; alſo iſt der Flä-

chen-

cheninhalt aller Trapeze oder des Unterſcheides beyder Vielecke das Produkt aus der halben Summe beeder Perimeter in ihre Entfernung x y. Dieſe Entfernung x y aber wird unendlich klein oder = o, ſobald die Seiten der Vielecke unendlich klein werden, oder ſobald die Vielecke unendlich viele Seiten haben; alſo wird auch in dieſem Falle das Produkt aus der halben Summe beeder Perimeter in dieſe Entfernung x y, oder der Unterſcheid beyder Vielecke = o.

Wenn alſo einem Kreiſe ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen Seiten ein- und umgeſchrieben iſt; ſo ſind dieſe Vielecke einander gleich, folglich beyde auch dem Kreiſe gleich, der, ſolange die Vielecke noch nicht unendlich viele Seiten haben, immer größer, als das eingeſchriebene, und kleiner, als das umgeſchriebene bleibt.

Daher kann der Kreis allemal als ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Und daher iſt der Flächeninhalt des Kreiſes das Produkt aus dem halben Umfange in den Halbmeſſer deſſelben.

Von der Lage der geraden Linien und Ebenen.

103.

Bisher hat man nur von Linien und Winkeln, welche ſich in einer und derſelben Ebene befinden, gehandelt. Itzt wird man Linien und Winkel, welche auch in verſchiedenen Ebenen liegen, betrachten.

Weil hier nicht von der Größe, ſondern nur von der Lage der Linien und Ebenen die Rede iſt; ſo muß man ſich ſolche allzeit als unbegränzt vorſtellen: obgleich man die Ebenen, um ſie vorzubilden, in Linien einzuſchließen pflegt.

104.

Fig. 110. 104. Wenn eine gerade Linie m q zween Punkte m und n mit einer Ebene a b gemein hat; ſo liegen alle Punkte dieſer geraden Linie oder die ganze Linie in der Ebene a b. Denn ſonſt würde a b wider die Vorausſetzung keine Ebene ſeyn.

Wenn eine Gerade S T eine Ebene a b ſchneidet; ſo hat ſie mit der Ebene nur einen Punkt gemein. Denn würde ſie zween Punkte mit der Ebene gemein haben; ſo würde ſie nach Vorigem ganz in der Ebene liegen, und wider die Vorausſetzung dieſelbe nimmermehr ſchneiden.

Hat eine gerade Linie einen Punkt m mit einer Ebene a b gemein; ſo liegt ſie entweder ganz in der Ebene, wie m q, oder ſie ſchneidet dieſelbe, wie S T, und entfernet ſich beederſeits von derſelben ohne Ende fort.

Fig. 111. 105. Zieht man durch jede zween Punkte m und n des Durchſchnittes m n zwoer Ebenen a b und c d eine gerade Linie; ſo hat dieſe gerade Linie die zween Punkte m und n mit beeden Ebenen gemein; alſo liegt ſie ganz in beeden Ebenen, und macht folglich, weil zwo Flächen ſich allemal nur in einer Linie ſchneiden, mit dem Durchſchnitte dieſer Ebenen nur eine und dieſelbe Linie aus.

Daher iſt der Durchſchnitt zwoer Ebenen allzeit eine gerade Linie.

Fig. 112. 106. Drehet ſich ein Rechteck a b d c um die unbewegliche Seite a b; ſo wird der Punkt d einen Umfang beſchreiben, und das Rechteck ſo oft wieder eine andere Ebene a f, a h vorſtellen, als der Punkt d ſich in einem andern Punkte f, h, des Umfanges befindet. Ferner wird das Rechteck einem jeden Punkt, welcher außer a b liegt, einmal begegnen und ihn auch wieder verlaſſen, ſobald es weiter rücket.

Durch eine gerade Linie laſſen ſich alſo unendlich viele Ebenen, und durch eine gerade Linie und einen Punkt außer derſelben allemal eine, aber auch nur eine Ebene führen.

Füh-

Führet man durch eine gerade Linie a b und durch einen Punkt r eine Ebene a d; ſo hat die Gerade b r die zween Punkte b und r, und die Gerade a r die zween Punkte a und r mit dieſer Ebene a d gemein; alſo liegen auch b r und a r ganz in derſelben. Fig. 112.

Iſt m q mit a c gleichlaufend, und durch a c und m eine Ebene a b geführt; ſo kann m q dieſe Ebene nicht ſchneiden; ſonſt würde m q ſich wie m s beederſeits von der Ebene a b, alſo auch von der Geraden a c, welche in dieſer Ebene liegt, ohne Ende fort entfernen, und folglich wider die Vorausſeßung nimmermehr mit a c gleichlaufen; alſo muß m q auch ganz in der Ebene a b liegen. Fig. 110.

Es läßt ſich alſo durch jede Gerade und einen Punkt außer derſelben, durch jede zwo Geraden, welche ſich ſchneiden, oder welche miteinander gleichlaufen, durch jede drey Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, oder durch die drey Seiten eines jeden Dreyeckes allemal eine, aber auch nur eine Ebene führen.

Von den auf eine Ebene ſenkrechten geraden Linien.

107. Iſt die Gerade o a ſenkrecht auf die Geraden b e und c d, welche in der Ebene p q liegen, und man zieht durch a was immer für eine Gerade m n, nimmt a b = a e und a d = a c, und zieht ſodann b c, d e, o c, o m, o b, o d, o n und o e; ſo haben die Dreyecke o a b und o a e, o a d und o a c, d a e und b a c zwo Seiten und den eingeſchoſſenen Winkel gleich; alſo ſind es auch ihre dritten Seiten o b und o e, o d und o c, d e und b c; folglich haben die Dreyecke b o c und d o e alle drey Seiten wechſelweiſe gleich, Fig. 113.

Sodann haben die Dreyecke b a m und e a n nebſt den gleichen Seiten a b und a e, und den an der Spitze entgegengeſetzten Winkel bey a auch die Winkel a b m und a e n, welche in den vollkommen gleichen Dreyecken b a c und d a e den gleichen Seiten a c und a d entgegenſtehen, gleich; alſo ſind es auch die Seiten a m und a n, b m und e n. Ferner haben die Dreyecke o b m und o e n nebſt den gleichen Seiten o b und o e, b m und e n auch die eingeſchloſſenen Winkel o b m und o e n, welche in den vollkommen gleichen Dreyecken b o c und d o e den gleichen Seiten o c und o d entgegenſtehen, gleich; alſo ſind es auch die Seiten o m und o n: und weil auch a m gleich a n iſt; ſo haben endlich die Dreyecke o a m und o a n alle drey Seiten gleich; alſo ſind es auch die Winkel o a m und o a n; folglich iſt o a auch ſenkrecht auf m n.

Wenn alſo eine Gerade eine Ebene ſchneidet, und ſenkrecht iſt auf zwo Geraden, welche in der Ebene gezogen ſind; ſo iſt ſie ſenkrecht auf alle Geraden, welche in der Ebene durch ihren Durchſchnitt gezogen werden.

Schneidet eine Gerade eine Ebene dergeſtalt, daß ſie ſenkrecht iſt auf alle Geraden, welche in der Ebene durch den Durchſchnitt können gezogen werden; ſo heißt ſie **ſenkrecht auf die Ebene.**

Wenn alſo eine Gerade auf zwo Geraden einer Ebene ſenkrecht iſt; ſo iſt ſie auch ſenkrecht auf die Ebene.

Fig. 114. 108. Iſt o a ſenkrecht auf die Ebene p q, und man zieht durch jeden Punkt dieſer Senkrechten, was immer für eine Gerade o b und a c; ſo werden die Ebenen o a b und o a c die Ebene p q in a b und a d ſchneiden, alſo die Winkel o b a und o a c wegen der rechten Winkel o a b und o a d ſpitze Winkel ſeyn.

Daher iſt durch jeden Punkt auf dieſelbe Ebene nur eine ſenkrechte Gerade möglich. Und wenn

zwo Geraden auf dieſelbe Ebene ſenkrecht ſind, und einen Punkt gemein haben, ſo machen ſie nur eine und dieſelbe Gerade aus.

109. Iſt oa ſenkrecht auf die Ebene pq, und man zieht durch oa und jeden Punkt b der Ebene pq eine Ebene oab; ſo wird dieſe jede andere Ebene pr, welche Fig. 115. durch den Punkt a geht, in einer Geraden ad, und welche Fig. 116. durch b geht, in einer Geraden bd ſchneiden, alſo oa wegen des rechten Winkels oab ſchief auf ad Fig. 115. und ſchief auf bd Fig. 116, alſo auch ſchief auf die Ebene pr ſeyn. Fig. 115. 116.

Durch jeden Punkt iſt alſo nur eine ſenkrechte Ebene auf eine gerade Linie möglich. Und zwo auf dieſelbe Gerade ſenkrechten Ebenen, welche einen Punkt gemein haben, machen allemal nur eine und dieſelbe Ebene aus.

110. Zieht man in den Ebenen ad, af und ah auf ab die Senkrechten ac, ae und ag; ſo ſind die Ebenen eac und eag ſenkrecht auf ab; alſo machen ſie wegen des gemeinen Punktes a nur eine und dieſelbe Ebene aus. Fig. 112.

Daher liegen alle Senkrechten, welche man durch einen Punkt einer geraden Linie auf ebendieſelbe ziehen kann, allemal in einer und derſelben Ebene.

111. Iſt oa ſenkrecht auf die Ebene pq, und cb gleichlaufend mit oa, und man zieht in der Ebene ca die Gerade bo und in der Ebene pq die Gerade bd ſenkrecht auf den Durchſchnitt ba und gleich ao, ſodann noch die Geraden ad und od; ſo haben die rechtwinklichten Dreyecke oab und dba die Kathede ba gemein, und die Katheden bd und oa gleich; alſo ſind es auch die Hypothenuſen da und bo; folglich haben die Dreyecke obd und oad wegen der gemeinen Seite od alle drey Seiten gleich; alſo ſind es auch die Winkel oad Fig. 117.

und obd; oad aber iſt ein rechter Winkel, folglich iſt auch obd ein rechter.

Weil nun db ſenkrecht iſt auf ba und bo; ſo iſt db ſenkrecht auf die Ebene ca, alſo auch ſenkrecht auf die Gerade bc: und weil ba ſenkrecht iſt auf eine aus zwo Gleichlaufenden ao, ſo iſt ba auch ſenkrecht auf die andere bc. Alſo iſt bc ſenkrecht auf ba und auf bd, folglich auch ſenkrecht auf die Ebene pq.

Wenn alſo eine aus zwo gleichlaufenden Geraden ſenkrecht iſt auf eine Ebene, ſo iſt es auch die andere.

Fig. 117. 112. Sind cb und oa ſenkrecht auf die Ebene pq, und bn gleichlaufend mit oa; ſo iſt auch bn nach Vorigem ſenkrecht auf die Ebene pq, und macht folglich wegen des gemeinen Punktes b mit bc nur eine und dieſelbe Gerade aus; alſo iſt auch bc mit ao gleichlaufend.

Wenn daher zwo Geraden auf dieſelbe Ebene ſenkrecht ſind; ſo ſind ſie gleichlaufend.

Fig. 117. 113. Sind oa und cb gleichlaufend mit sd, und sd ſenkrecht auf eine Ebene pq; ſo ſind auch oa und cb ſenkrecht auf dieſelbe Ebene, alſo oa und cb gleichlaufend unter ſich.

Daher ſind die Gleichlaufenden mit einer dritten auch allemal gleichlaufend unter ſich, wenn gleich alle drey nicht in derſelben Ebene liegen.

Fig. 112. 114. Zieht man durch jeden Punkt c oder a in der Ebene ad auf ab die Senkrechte ac und in jeder andern Ebene ah durch a auf ab die Senkrechte ag; ſo iſt die Ebene gac ſenkrecht auf die Gerade ab.

Es läßt ſich alſo durch jeden Punkt auf eine gegebene Gerade eine ſenkrechte Ebene führen.

Fig. 117. 115. Zieht man durch jeden Punkt b der Ebene pq in ebenderſelben eine Gerade bd, auf bd eine ſenkrechte Ebene ca und in dieſer bc ſenkrecht auf den Durchſchnitt ba; ſo iſt bc ſenkrecht auf zwo Geraden ba und bd,

wel-

welche in der Ebene pq liegen, alſo auch ſenkrecht auf die Ebene pq. Und zieht man durch jeden Punkt o und die Senkrechte bc eine Ebene ca, und in dieſer oa gleichlaufend mit bc; ſo iſt oa auch ſenkrecht auf die Ebene pq.

Daher kann durch jeden Punkt auf eine gegebene Ebene allemal eine ſenkrechte gerade Linie gezogen werden.

Von den mit einer Ebene gleichlaufenden geraden Linien.

116. Wenn alle Senkrechten, welche man von den Punkten einer Geraden auf eine Ebene zieht, gleich ſind; ſo heißt die Gerade **gleichlaufend mit der Ebene.**

117. Zieht man von jedem Punkte c einer Geraden co auf die Ebene pq die Senkrechte cb, durch co und cb die Ebene ca, und in dieſer oa ſenkrecht auf den Durchſchnitt ba; ſo iſt oa gleichlaufend mit cb, alſo auch ſenkrecht auf die Ebene pq. Da nun durch jeden Punkt o auf die Ebene pq nur eine Senkrechte möglich iſt; ſo fallen alle Senkrechten, welche von den Punkten der Geraden co auf die Ebene pq gezogen werden können, in den Durchſchnitt ba. Fig. 117.

Nachdem alſo co mit dem Durchſchnitte ba gleichläuft, oder dieſen Durchſchnitt in einem Punkte begegnet; ſo iſt auch co mit der Ebene pq gleichlaufend, oder begegnet dieſelbe in einem Punkte.

Daher iſt jede Gerade mit einer Ebene gleichlaufend oder ſchneidet dieſelbe.

118. Führet man cb ſenkrecht auf die Ebene pq, durch cb eine Ebene ca, und in dieſer co gleichlaufend mit dem Durchſchnitte ba; ſo iſt co auch gleichlaufend mit der Ebene pq. Da nun durch cb unendlich viele Ebenen, wie ca, möglich ſind; ſo können auch durch jeden Punkt c mit einer Ebene pq unendlich viele gleichlaufende gerade Linien gezogen werden. Fig. 117.

Von den gleichlaufenden Ebenen.

119. Wenn alle Senkrechten, welche man von den Punkten einer Ebene auf eine andere Ebene ziehen kann, gleich ſind; ſo heißen dieſe Ebenen **gleichlaufend.**

Zwo gleichlaufende Ebenen können alſo einander nirgends begegnen, und wenn zwo gleichlaufende Ebenen einen Punkt gemein haben; ſo machen ſie allemal nur eine und dieſelbe Ebene aus.

Fig. 112. 120. Wenn zwo gleichlaufende Ebenen g a c und h b d von einer dritten a h geſchnitten werden; ſo können die Durchſchnitte a g und b h ſich nirgends begegnen, alſo ſind ſie, weil beede in derſelben Ebene a h liegen, gleichlaufend.

Wenn alſo zwo gleichlaufende Ebenen von einer dritten geſchnitten werden; ſo ſind ihre Durchſchnitte gleichlaufend.

Fig. 112. 121. Iſt a b ſenkrecht auf die Ebenen h b d und g a c, und man zieht aus jedem Punkte e der Ebene g a c auf die Ebene h b d die Senkrechte e f; ſo iſt e f mit a b gleichlaufend; und zieht man durch a b und e f eine Ebene a f; ſo ſind die Durchſchnitte a e und b f auch gleichlaufend; alſo iſt a b f e ein Parallelogramm, folglich die Seite e f der Seite a b gleich.

Daher ſind jede zwo Ebenen, welche auf eine und dieſelbe gerade Linie ſenkrecht ſind, gleichlaufend.

Fig. 112. 122. Iſt die Ebene g a c mit der Ebene h b d gleichlaufend, und a b ſenkrecht auf h b d, und man zieht durch a b die Ebene a h und die Ebene a d; ſo ſind die Durchſchnitte a g mit b h und a c mit b d gleichlaufend; alſo iſt a b ſenkrecht auf a g und auf a c, folglich auch ſenkrecht auf die Ebene g a c.

Wenn alſo eine Gerade auf eine aus zwo gleichlaufenden Ebenen ſenkrecht iſt; ſo iſt ſie es auch auf die andere.

Fig. 118. 123. Wenn zwo Ebenen h b d und g a c mit der Ebene m o n gleichlaufen, und man zieht a b ſenkrecht auf

die

die Ebene mon; ſo iſt ab auch ſenkrecht auf die Ebenen gac und hbd; alſo ſind auch dieſe zwo Ebenen gleichlaufend.

Wenn alſo zwo Ebenen mit einer dritten gleichlaufen; ſo ſind ſie auch gleichlaufend unter ſich.

124. Zieht man durch jeden Punkt a auf die Ebene zxy die Senkrechte ab, und durch denſelben Punkt a die Ebene gac ſenkrecht auf ab; ſo ſind die Ebenen gac und zxy ſenkrecht auf dieſelbe Gerade ab, alſo gleichlaufend. Fig. 118

Daher kann durch jeden Punkt mit einer gegebenen Ebene allemal eine gleichlaufende Ebene gezogen werden.

125. Iſt ac mit xy und ag mit xz gleichlaufend, und man zieht ab ſenkrecht auf die Ebene zxy, ſodann in dieſer bd mit xy, und bh mit xz gleichlaufend; ſo iſt auch bh mit ag und bd mit ac gleichlaufend; folglich ſind, wegen der rechten Winkel abh und abd, auch die Winkel bag und bac rechte Winkel; alſo ſind die Ebenen gac und hbd, oder gac und zxy ſenkrecht auf dieſelbe Gerade ab, folglich gleichlaufend. Fig. 118.

Wenn alſo zwo Geraden, welche ſich ſchneiden, mit zwo andern, welche ſich auch ſchneiden, gleichlaufen; ſo iſt die Ebene, worinn jene liegen, mit der Ebene, worinn dieſe liegen, gleichlaufend.

126. Nimmt man ferner bh gleich ag und bd gleich ac; ſo ſind gh und cd gleich und gleichlaufend mit ab, alſo gleich und gleichlaufend unter ſich, folglich iſt auch gc gleich hd. Alſo haben die Dreyecke gac und hbd alle drey Seiten wechſelweiſe gleich; folglich iſt auch der Winkel gac dem Winkel hbd oder zxy gleich. Fig. 118.

Wenn alſo zwo Geraden, welche ſich ſchneiden, mit zwo andern, welche ſich auch ſchneiden, gleichlaufen; ſo ſchließen ſie auf derſelben Seite gleiche Winkel ein, wenn ſie auch in verſchiedenen Ebenen liegen.

Fig. 118. 127. Wenn zwo Ebenen ah und ad ſich in einer Geraden ab ſchneiden, und man zieht durch jeden Punkt o des Durchſchnittes ab auf ebendieſen die Senkrechte om in einer, und die Senkrechte on in der andern Ebene; ſo iſt der Winkel mon das **Maß** des Winkels, welchen die Ebene ah mit der Ebene ad in dem Durchſchnitte ab macht.

Fig. 119. 128. Wenn zwo Ebenen xy und zu ſich in ab ſchneiden, und man zieht die Ebene pq ſenkrecht auf ab; ſo ſind die Durchſchnitte cz und dy ſenkrecht auf ab, alſo die Winkel ybc, ybz, zbd und dbc die Maße der vier Winkel, welche die Ebene xy mit der Ebene zu in dem Durchſchnitte ab macht.

Wenn alſo zwo Ebenen ſich ſchneiden; ſo ſind die am Durchſchnitte entgegengeſetzten Winkel gleich, und ihre Nebenwinkel machen zuſammen allemal 180° aus.

Fig. 120. 129. Wenn zwo gleichlaufende Ebenen xy und zu von einer dritten mn in den Geraden ab und cd geſchnitten werden; ſo ſind die Durchſchnitte ab und cd gleichlaufend: zieht man alſo die Ebene pq ſenkrecht auf ab; ſo iſt dieſe Ebene auch ſenkrecht auf cd; alſo ſind die Winkel, welche die Durchſchnitte dieſer Ebene und jener dreyen in den Punkten b und d machen, die Maße der Winkel, welche die Ebenen xy und zu mit der Ebene mn in den Durchſchnitten ab und cd machen.

Was ſich alſo von den Winkeln, welche entſtehen, wenn zwo gleichlaufende Geraden von einer dritten geſchnitten werden, ſagen läßt, ebendas gilt auch von den Winkeln, welche entſtehen, wenn zwo gleichlaufende Ebenen von einer dritten geſchnitten werden.

Von den auf eine Ebene ſenkrechten Ebenen.

130. Wenn zwo Ebenen ſich ſchneiden; ſo ſind ihre Nebenwinkel gleich oder ungleich: im erſten Falle heißen die-

dieſe Ebenen **ſenkrecht**, und im zweyten Falle **ſchief aufeinander**.

131. Iſt ab ſenkrecht auf die Ebene pq, und man führt durch ab was immer für eine Ebene zu, und in der Ebene pq durch b die Gerade dy ſenkrecht auf den Durchſchnitt zc; ſo iſt der Winkel aby das Maß des Winkels dieſer Ebenen; alſo ſind dieſe Ebenen ſenkrecht aufeinander. Fig. 119.

Wenn man alſo durch eine auf eine Ebene ſenkrechte gerade Linie eine Ebene zieht; ſo ſind dieſe Ebenen ſenkrecht aufeinander.

Es laſſen ſich daher durch jede Senkrechte auf eine Ebene unendlich viele auf ebendieſe Ebene ſenkrechte Ebenen führen.

132. Iſt die Ebene zu ſenkrecht auf die Ebene pq, und man zieht durch jeden Punkt a oder b in der Ebene zu die Gerade ab ſenkrecht auf den Durchſchnitt zc, und durch b in der Ebene pq die Gerade by auch ſenkrecht auf zc; ſo iſt der Winkel aby das Maß des Winkels dieſer Ebenen, alſo ein rechter Winkel; folglich iſt ab ſenkrecht auf cz und by, alſo auch ſenkrecht auf die Ebene pq. Fig. 119.

Wenn alſo zwo Ebenen ſenkrecht aufeinander ſind, und man zieht durch was immer für einen Punkt der einen Ebene eine ſenkrechte Gerade auf ihren Durchſchnitt; ſo iſt dieſe Gerade auch ſenkrecht auf die andere Ebene. Und weil durch jeden Punkt nur eine Senkrechte auf eine Ebene möglich iſt; ſo liegt jede Gerade, welche man durch was immer für einen Punkt der einen Ebene ſenkrecht auf die andere Ebene zieht, allemal ganz in jener.

133. Wenn zwo Ebenen zu und xy ſenkrecht auf eine dritte pq ſind, und man zieht durch jeden Punkt a oder b des Durchſchnittes ab eine Senkrechte auf die Ebene pq; ſo muß dieſe Senkrechte nach Vorigem ganz in der Ebene xy, und in der Ebene zu liegen, alſo mit Fig. 119.

dem Durchſchnitte a b nur eine und dieſelbe Gerade ausmachen.

Der Durchſchnitt zwoer Ebenen, welche auf eine dritte Ebene ſenkrecht ſind, iſt alſo allemal auch ſenkrecht auf ebendieſe dritte Ebene.

Fig. 114. 134. Iſt die Gerade o b ſchief auf die Ebene p q, und man zieht o a ſenkrecht auf die Ebene p q; ſo iſt die Ebene o b a, weil ſie durch die Senkrechte o a geht, auch allemal ſenkrecht auf die Ebene p q.

Es läßt ſich alſo durch jede auf eine Ebene ſchiefe gerade Linie auf ebendieſe Ebene allemal eine, aber auch nur eine ſenkrechte Ebene führen.

Fig. 121. 135. Iſt o c ſchief auf die Ebene p q, und man zieht durch o c die Ebene m n ſenkrecht auf die Ebene p q, beſchreibt aus c mit beliebigem Halbmeſſer den Halbkreis b f d, und zieht in der Ebene m n auf b d die Senkrechte o a die Geraden o b, o d, ſodann in der Ebene p q auf beliebige Punkte des Umfanges die Geraden a e und c e, a f und c f, endlich noch die Geraden o e und o f; ſo iſt a d kleiner als a e, weil a d verlängert durch den Mittelpunkt geht, und a e kleiner als a f, weil der Bogen b e größer als b f iſt; alſo werden in den rechtwinklichten Dreyecken o a d, o a e, o a f, o a b, wegen der gemeinen Kathede o a, die Hypothenuſen o d, o e, o f, o b größer, ſo wie die Katheden a d, a e, a f, a b größer werden; folglich werden auch in den Dreyecken o c d, o c e, o c f, o c b, welche o c gemein, und die Seiten c d, c e, c f und c b gleich haben, die Winkel o c d, o c e, o c f und o c b größer, ſo wie die entgegengeſetzten Seiten o d, o e, o f, o b größer werden.

Wenn man alſo durch die auf eine Ebene p q ſchiefe Gerade o c eine ſenkrechte Ebene m n zieht; ſo macht o c mit dem Durchſchnitte b d auf einer Seite einen ſpitzen Winkel o c d und auf der andern Seite einen ſtumpfen o c b; jener iſt der kleinſte

und

und dieſer der größte aus allen Winkeln, welche oc mit den Geraden cd, ce, cf, cb macht. Die andern Winkel oce, ocf werden größer, da der Bogen de, df größer wird. Und wird cf ſenkrecht auf den Durchſchnitt bd; ſo iſt cf ſenkrecht auf die Ebene mn, alſo ocf ein rechter Winkel.

Von den ähnlichen Dreyecken.

136.

Um die Algebra auf die Geometrie anzuwenden, drückt man durch einzelne Buchſtaben ganze Linien aus; deswegen kann man Deutlichkeit halber die Ende der Linien mit Ziffern bezeichnen.

Es ſey der Flächeninhalt des Dreyeckes 1.2.3 = P, die Grundlinie 2. 3 = a und die Höhe 1. 7 = b; ferner der Flächeninhalt des Dreyeckes 4. 5. 6 = Q, die Grundlinie 5. 6 = c und die Höhe 4. 7 = d; ſo iſt Fig. 122.

$$P = \frac{ab}{2} \text{ und}$$

$$Q = \frac{cd}{2}; \text{ alſo verhält ſich}$$

$$P : Q = \frac{ab}{2} : \frac{cd}{2}, \text{ oder}$$

$$P : Q = ab : cd.$$

Daher verhalten ſich jede zwey Dreyecke, wie die Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

Iſt $a = 6$, und $b = 3$

$c = 2$, und $d = 1$;

ſo verhält ſich $P : Q = 18 : 2 = 9 : 1$.

Weil das Verhältniß $ab : cd = (a : c)(b : d)$ aus den Verhältniſſen $a : c$ und $b : d$ zuſammengeſetzet iſt: ſo

ſtehen jede zwey Dreyecke in einem aus dem geraden Verhältniſſe ihrer Grundlinien und dem geraden Verhältniſſe ihrer Höhen zuſammengeſetzten Verhältniſſe.

Fig. 122. 137. Iſt a = c, und man dividirt in der allgemeinen Proportion

$$P : Q = ab : cd$$

das dritte Glied durch a und das vierte durch c; ſo erhält man

$$P : Q = b : d.$$

Und iſt b = d; ſo giebt das dritte Glied der allgemeinen Proportion durch b und das vierte durch d dividirt

$$P : Q = a : c.$$

Iſt P = Q; ſo iſt auch ab = cd, alſo verhält ſich, a : c = d : b. Und verhält ſich a : c = d : b; ſo iſt auch ab = cd, folglich wieder P = Q.

Daher verhalten ſich Dreyecke, welche gleiche Grundlinien haben, wie ihre Höhen, und, welche gleiche Höhen haben, wie ihre Grundlinien. Ferner verhalten ſich in gleichen Dreyecken die Grundlinien verkehrt, wie die Höhen: und wenn die Grundlinien zweyer Dreyecke ſich verkehrt, wie die Höhen, verhalten; ſo ſind die Dreyecke gleich.

Fig. 123. 138. Zieht man aus dem gemeinen Scheitel 3 der Dreyecke 1. 2. 3, und 1. 4. 3 auf 1. 4 die Senkrechte 3. 7, ſo iſt dieſe Höhe 3. 7 beyden Dreyecken gemein: alſo verhalten ſich dieſe Dreyecke, wie ihre Grundlinien 1. 2 und 1. 4. Ebenſo verhalten ſich die Dreyecke 1. 4. 3 und 1. 4. 5, wegen der gemeinen Höhe 4. 7, wie ihre Grundlinien 1. 3. und 1. 5.

Wenn man alſo zween Scheitel 4 und 3 zweyer Dreyecke 1. 2. 3 und 1. 4. 5, welche einen Winkel 1 gemein haben, durch eine Gerade 4. 3 verbindet; ſo erhält man ein drittes Dreyeck 1. 4. 3, welches ebendieſen Winkel 1 mit den vorigen gemein hat, und deſſen Verhältniß zu jedem aus den vorigen Dreyecken durch die Seiten ebendieſer ausgedrücket werden kann. Folglich muß

das

das Verhältniß der zwey erſten Dreyecke ſich auch durch ebendieſe Seiten vorſtellen laſſen.

Es ſey daher das Dreyeck

1. 2. 3 = P

1. 4. 3 = Z und

1. 4. 5 = Q; ſo verhält ſich

P : Z = a : c, und

Z : Q = b : d, alſo beede Proportionen Glied für Glied miteinander multiplicirt;

PZ : QZ = ab : cd oder

P : Q = ab : cd.

Daher verhalten ſich Dreyecke, die einen Winkel gemein haben, wie die Produkte der Seiten, welche dieſen Winkel einſchließen.

Da Dreyecke, welche einen Winkel gleich haben, allemal ſo aufeinander geleget werden können, daß dieſer Winkel beyden gemein wird; ſo verhalten ſich auch dieſe Dreyecke, wie die Producte der Seiten, welche die gleichen Winkel einſchließen.

139. Sind in den Dreyecken P und Q die Winkel 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 gleich; ſo verhält ſich nach Vorigem wegen der gleichen Winkel 1 und 4 Fig. 124.

P : Q = ab : de,

wegen der gleichen Winkel 2 und 5

P : Q = ac : df,

und wegen der gleichen Winkel 3 und 6

P : Q = bc : ef, folglich

ab : de = ac : df, und

ab : de = bc : ef.

Dividirt man nun ein äußers und ein mittlers Glied dieſer zwo letztern Proportionen, ſo oft man kann, durch Gleiches; ſo giebt die 1te

ab : e = ac : f, oder

b : e = c : f

und die 2te

$$ab : d = bc : f,$$ oder

$$a : d = c : f;$$

alſo verhält ſich

$$a : d = b : e = c : f.$$

Daher iſt in Dreyecken, welche alle drey Winkel wechſelweiſe gleich haben, das Verhältniß der Seiten, welche den gleichen Winkeln entgegenſtehen, immer einerley. Oder, welches ebenſoviel heißt, in Dreyecken, welche alle drey Winkel wechſelweiſe gleich haben, ſtehen die gleichnamigen Seiten in einer Proportion.

Gleichnamig heißen jene Seiten, welche in verſchiedenen Dreyecken den gleichen Winkeln entgegenſtehen, oder welche von verſchiedenen Dreyecken ſind, und in einer Proportion den Vor- und Nachſatz eines und deſſelben Verhältniſſes ausmachen.

Fig. 124. 140. Iſt der Winkel $4 = 1$, und verhält ſich,

$$a : d = b : e,$$

und man nimmt $1.\ 7 = 4.\ 5$, und zieht 7. 8. gleichlaufend mit 2. 3; ſo haben die Dreyecke 1. 7. 8 und 1. 2. 3 alle drey Winkel wechſelweiſe gleich; alſo verhält ſich auch nach Vorigem

$$a : d = b : x,$$

folglich iſt $x = e$.

Alſo haben die Dreyecke 1. 7. 8 und 4. 5. 6 zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberſtehen; alſo iſt der Winkel $5 = 7 = 2$ und der Winkel $6 = 8 = 3$.

Sind daher in jeden zwey Dreyecken zwo Seiten proportionirt, und die eingeſchloſſenen Winkel gleich; ſo haben dieſe Dreyecke auch die übrigen Winkel, welche den gleichnamigen Seiten gegenüberſtehen, wechſelweiſe gleich.

141. Verhält ſich Fig. 124.

$a : d = b : e$, und

$a : d = c : f$

und man nimmt $1.\ 7 = 4.\ 5$, und zieht 7. 8 gleichlaufend mit 2. 3; ſo haben die Dreyecke 1. 7. 8 und 1. 2. 3 wieder alle drey Winkel wechſelweiſe gleich; alſo verhält ſich auch $a : d = b : x$ und

$a : d = c : y$;

folglich iſt $x = e$ und $y = f$. Alſo haben die Dreyecke 1. 7. 8 und 4. 5. 6 alle drey Seiten wechſelweiſe gleich; folglich ſind es auch die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberſtehen, alſo iſt der Winkel

$4 = 1$,

$5 = 7 = 2$ und

$6 = 8 = 3$.

Sind daher in jeden zwey Dreyecken alle drey Seiten proportionirt; ſo haben dieſe Dreyecke auch alle drey Winkel, welche den gleichnamigen Seiten gegenüberſtehen, wechſelweiſe gleich.

142. Sind die Winkel 2 und 5 rechte, und verhält ſich Fig. 125.

$a : d = b : e$,

und man macht den Winkeln $5.\ 4.\ 7 = 2.\ 1.\ 3$; ſo haben die Dreyecke 5. 4. 7 und 2. 1. 3 alle drey Winkel wechſelweiſe gleich; folglich verhält ſich auch

$a : d = b : n$; alſo iſt

$n = e$ und daher $5.\ 7 = 5.\ 6$,

folglich der Winkel $5.\ 4.\ 6 = 5.\ 4.\ 7 = 2.\ 1.\ 3$.

Sind alſo in jeden zwey rechtwinklichten Dreyecken die Hypothenuſe und eine Kathede proportionirt; ſo haben dieſe Dreyecke alle drey Winkel, welche den gleichnamigen Seiten entgegenſtehen, wechſelweiſe gleich.

143. Verhält ſich $a : d = b : e$, Fig. 126. 127.

und ſind die Winkel 3 und 6, welche den größern Seiten a und d entgegenſtehen, gleich: ſo müſſen die Winkel 2

und

128. und 5, welche den kleinern Seiten b und e entgegenſte-
129. hen, ſpitze Winkel ſeyn, alſo die Senkrechten 1. 7 und 4. 7 auf die Seite dieſer ſpitzen Winkel fallen, und zwar inner die Dreyecke, wenn Fig. 126. und 127. die Winkel 3 und 6 ſpitze, und außer die Dreyecke, wenn Fig. 128. und 129. dieſe Winkel 3 und 6 ſtumpfe ſind.

In beeden Fällen haben die Dreyecke 1. 7. 3 und 4. 7. 6, nebſt den rechten Winkeln 7 auch die Winkel 3 und 6, alſo alle drey Winkel wechſelweiſe gleich; folglich verhält ſich b : e = m : n und daher auch

a : d = m : n;

alſo haben die rechtwinklichten Dreyecke 1. 7. 2. und 4. 7. 5 die Hypothenuſe und eine Kathede proportionirt; folglich ſind die Winkel 2 und 5, welche den gleichnamigen Katheden m und n entgegenſtehen, gleich; alſo haben auch die Dreyecke 1. 2. 3, und 4. 5. 6, alle drey Winkel wechſelweiſe gleich.

Sind daher in jeden zwey Dreyecken zwo Seiten proportionirt, und die Winkel, welche den größern Seiten gegenüberſtehen, gleich; ſo haben dieſe Dreyecke alle drey Winkel wechſelweiſe gleich.

Fig. 144. Verhält ſich wieder a : d = b : e,
126. und ſind die Winkel 2 und 5, welche den kleinern Sei-
127. ten b und e entgegenſtehen, alſo allemal ſpitze Winkel
128. ſind, gleich; ſo müſſen die Senkrechten 1. 7 und 4. 7
129. wieder inner oder außer den Dreyecken fallen, nachdem die Winkel 3 und 6, welche den größern Seiten a und d entgegenſtehen, ſpitze oder ſtumpfe ſind.

In allen Fällen haben die rechtwinklichten Dreyecke 1. 7. 2 und 4. 7. 5 alle drey Winkel wechſelweiſe gleich; alſo verhält ſich

a : d = m : n und daher auch

b : e = m : n;

folglich haben die rechtwinklichten Dreyecke 1. 7. 3 und 4. 7. 6 wieder die Winkel 3 und 6 gleich. Alſo ſind in den Dreyecken 1. 2. 3 und 4. 5. 6. die Winkel 3

und

und 6, Fig. 126 und 127, oder Fig. 128 und 129 gleich, und Fig. 126 und 129, oder Fig. 127 und 128 ungleich.

Sind daher in jeden zwey Dreyecken zwo Seiten proportionirt, und die Winkel, welche den kleinern Seiten entgegenſtehen, gleich; ſo haben dieſe Dreyecke alle drey Winkel wechſelweiſe gleich, wenn die Winkel, welche den größern Seiten entgegenſtehen, in beyden Dreyecken ſpitze oder in beyden ſtumpfe Winkel ſind; und nicht alle drey Winkel wechſelweiſe gleich, wenn der eine aus jenen der größern Seiten entgegengeſetzten Winkeln ſpitz, und der andere ſtumpf iſt.

145. Wenn zwo Geraden ſich ſchneiden und mit zwo andern Geraden, welche ſich auch ſchneiden, gleichlaufen; ſo ſchließen jene und dieſe um den Durchſchnitt gleiche Winkel ein. Iſt alſo ab mit de, bc mit ef, und ac mit df gleichlaufend; ſo iſt der Winkel a = d, b = e und c = f. Fig. 130.

Wenn alſo die drey Seiten eines Dreyeckes mit den drey Seiten eines andern Dreyeckes gleichlaufen; ſo haben dieſe Dreyecke alle drey Winkel, welche den gleichlaufenden Seiten entgegenſtehen, wechſelweiſe gleich.

146. Iſt ad auf ac, ae auf ab, und de auf bc ſenkrecht; ſo iſt der Winkel m = x, weil jeder das Komplement von y iſt. Ferner iſt nach der Vorausſetzung in dem Vierecke aeqb der Winkel x + y, ſo wie der Winkel z, ein rechter, alſo machen u + T 180° aus; folglich iſt u = n, und daher auch d = s. Alſo haben die Dreyecke aed und abc alle drey Winkel wechſelweiſe gleich. Fig. 131.

Iſt nun ferner auch fg auf ac, fh auf ab, und gh auf bc ſenkrecht; ſo iſt fg mit ad, fh mit ae, und gh

mit

mit de gleichlaufend, folglich der Winkel f = m = x, h = n = b, und g = d = c.

Wenn alſo die drey Seiten eines Dreyeckes auf die drey Seiten eines andern Dreyeckes ſenkrecht ſind; ſo haben dieſe Dreyecke alle Winkel, welche den aufeinander ſenkrechten Seiten gegenüberſtehen, wechſelweiſe gleich.

147. Dreyecke, welche alle drey Winkel wechſelweiſe gleich, und die gleichnamigen Seiten proportionirt haben, werden **ähnlich** genennt.

Sind alſo in jeden Dreyecken 1tens zwey Winkel gleich, 2tens zwo Seiten proportionirt und die eingeſchloſſenen Winkel gleich, 3tens zwo Seiten proportionirt, und die den größern Seiten entgegengeſetzten Winkel gleich, 4tens zwo Seiten proportionirt, die den kleinern Seiten entgegengeſetzten Winkel gleich, und beede den größern Seiten entgegengeſetzten Winkel ſpitz oder beede ſtumpf, 5tens alle drey Seiten proportionirt, 6tens alle drey Seiten gleichlaufend oder 7tens alle drey Seiten ſenkrecht aufeinander; ſo ſind die Dreyecke in jedem Falle ähnlich.

Fig. 148. Sind in den Dreyecken P und Q die Winkel 1
132. und 4, 3 und 6, 2 und 5 gleich; ſo verhält ſich

$$P : Q = ab : de.$$

Es iſt aber das Verhältniß

$$ab : de = (a : d)(b : e),$$

aus den zwo gleichen Verhältniſſen a : d und b : e zuſammengeſetzet, alſo dem Quadrate jedes einfachen Verhältniſſes gleich: folglich verhält ſich auch

$$P : Q = aa : dd = bb : ee = cc : ff.$$

Daher verhalten ſich ähnliche Dreyecke, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Ver-

Verhält ſich a : d = 2 : 1; ſo verhält ſich auch
b : e = 2 : 1 und
c : f = 2 : 1, alſo
P : Q = 4 : 1.

Halbirt man die Seiten des Dreyeckes 1. 2. 3 in den Punkten 7, 8, 9, und zieht 7. 8, 7. 9 und 8. 9; ſo hat das Dreyeck 4. 6. 5 mit den Dreyecken 1. 8. 7, 8. 3. 9, 7. 9. 2, zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel, folglich mit dem Dreyecke 7. 8. 9 alle drey Seiten wechſelweiſe gleich. Alſo iſt das Dreyeck 4. 6. 5 wirklich 4mal in dem Dreyecke 1. 3. 2 enthalten, ſobald jede Seite 4. 5 2mal in der gleichnamigen Seite 1. 2 enthalten iſt.

149 Wenn man aus dem Scheitel 1 eines Winkels 2. 1. 3 mit verſchiedenen Halbmeſſern 1. 3 und 1. 4 zween Bögen beſchreibt, und zieht die Sehnen 2. 3 und 5. 4; ſo haben die Dreyecke 1. 4. 5 und 1. 3. 2 den Winkel 1 gemein; alſo iſt die Summe der Winkel 4 und 5 der Summe der Winkel 3 und 2 gleich: und weil dieſe Dreyecke gleichſchenklicht ſind; ſo iſt jeder dieſer Winkel die Hälfte von einer aus jenen Summen, folglich der Winkel 4 = 3, und der Winkel 5 = 2; alſo ſind die Dreyecke 1. 5. 4 und 1. 2. 3 ähnlich; daher verhält ſich Fig. 133.

1. 3 : 1. 4 = 3. 2 : 4. 5 oder
1. 3 : 3. 2 = 1. 4 : 4. 5

Wenn alſo drey Geraden a, b und c gegeben ſind; ſo läßt ſich allemal eine x finden, welche die vierte Proportionirte zu den drey gegebenen iſt. Denn beſchreibt man aus einem Punkte 1 einer Geraden 1. 3 mit dem Halbmeſſer a den Bogen 3. 2., trägt die Sehne b auf dieſen Bogen von 3 in 2, zieht die Gerade 1. 2, und beſchreibt mit dem Halbmeſſer c den Bogen 4. 5; ſo iſt die Sehne 4. 5 die verlangte vierte Proportionirte x. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke 1. 3. 2 und 1. 4. 5 verhält ſich a : c = b : x oder

a : b = c : x.

Fig. 134. 150. Weil Dreyecke ähnlich ſind, ſobald ſie 1tens zween Winkel wechſelweiſe gleich, oder 2tens zwo Seiten proportionirt und die eingeſchloſſenen Winkel gleich, oder 3tens zwo Seiten proportionirt, die zwoen gleichnamigen Seiten entgegengeſetzten Winkel gleich, und beede den andern zwo gleichnamigen Seiten entgegengeſetzten Winkel ſpitz oder beede ſtumpf, oder endlich 4tens alle drey Seiten proportionirt haben; ſo läßt ſich nach viererley Methoden auf einer gegebenen Geraden 4. 5 ein dem gegebenen Dreyecke 1. 2. 3 ähnliches Dreyeck 4. 5. 6 zeichnen.

Nach der erſten Methode macht man den Winkel 4 = 2, den Winkel 5 = 3, und verlängert die Schenkel, bis ſie ſich in einem Punkte 6 ſchneiden.

Nach der 2ten Methode macht man 1tens den Winkel 5 = 3, beſchreibt 2tens aus jedem Punkte 7 einer Geraden 7. 8 mit der Seite c einen Bogen 8. 9, ſchneidet aus 8 mit der Seite f dieſen Bogen in 9, und zieht die Gerade 7. 9; ſodann beſchreibt man 3tens aus 7 mit der Seite b den Bogen 10. 11, trägt die Sehne 10. 11 von 5 in 6, und zieht noch 4. 6. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke 7. 8. 9 und 7. 10. 11 verhält ſich

$$c : f = b : e;$$

alſo haben die Dreyecke 1. 2. 3 und 4. 5. 6 zwo Seiten proportionirt und den eingeſchloſſenen Winkel gleich.

Nach der 3ten Methode macht man den Winkel 4 = 2, ſucht die Seite e wie zuvor, beſchreibt aus 5 mit dem Halbmeſſer e einen Bogen 6. 15, und zieht 6. 5, wenn der Winkel 1 des gegebenen Dreyeckes 1. 2. 3 ein ſtumpfer iſt, oder 15. 5, wenn der Winkel 14 des gegebenen Dreyeckes 2. 14. 3 ein ſpitzer iſt. Denn in dieſem Falle haben die Dreyecke 1. 2. 3 und 4. 5. 6 oder 1. 14. 3 und 4. 15. 6 zwo Seiten proportionirt, einen entgegengeſetzten Winkel gleich, und den andern entgegengeſetzten in beyden Dreyecken ſtumpf oder in beyden ſpitz.

Nach der 4ten Methode ſucht man die Seite e wie zuvor, und beſchreibt aus 5 mit dem Halbmeſſer e einen Bogen 6. 15; ſodann beſchreibt man auch aus 7 mit der

Sei-

Seite a den Bogen 12. 13, ſchneidet aus 4 mit der Sehne 12. 13 den Bogen 6. 15 in 6, und zieht endlich 6. 4 und 6. 5. Denn wegen der ähnlichen Dreyecke 7. 8. 9 und 7. 12. 13 verhält ſich auch

$$c : f = a : d;$$

alſo haben die Dreyecke 1. 2. 3 und 4. 5. 6 alle drey Seiten proportionirt.

Anwendung.

151. Auf dem Felde macht man nach der 1ten Methode vermittelſt der Meßkette und Nägel den Winkel 5 = 3, den Winkel 4 = 2, und verlängert die Schenkel, bis ſie ſich in 6 ſchneiden. Fig. 135.

Nach der 2ten Methode macht man den Winkel 5 = 3, mißt die Seiten 2. 3, 1. 3 und 4. 5, ſetzt die Proportion an: **es verhält ſich die Anzahl der Klaftern von 2. 3 zur Anzahl der Klaftern von 4. 5, wie die Anzahl der Klaftern von 1. 3 zur Anzahl der Klaftern von der unbekannten Seite 5. 6**, und mißt endlich auf dem Schenkel 5. 6 von 5 gegen 6 ſoviel Klaftern fort, als durch die Auflöſung jener Proportion für das vierte Glied gefunden worden ſind.

Nach der 3ten Methode wird der Winkel 4 = 2 gemacht, die entgegengeſetzte Seite 5. 6 wie zuvor berechnet, die Kette in 5 befeſtiget, und mit 5. 9 = 5. 6 in dem Schenkel 4. 7 der Punkt 6 oder 8 beſtimmt, nachdem der Winkel 1 des gegebenen Dreyeckes 1. 2. 3 ein ſtumpfer, oder der Winkel 8 des gegebenen Dreyeckes 8. 2. 3 ein ſpitzer iſt.

Nach der 4ten Methode ſucht man die Anzahl der Klaftern von 5. 6 wie zuvor, und ebenſo auch die Anzahl der Klaftern von 4. 6, indem man ſagt: **es verhält ſich die Anzahl der Klaftern von 2. 3 zu jener von 4. 5, wie die Anzahl der Klaftern 1. 2. zu jener von 4. 6**; ſodann befeſtiget man eine

Kette in 5 und eine in 4, nimmt 5. 9 = 5. 6, und 4. 9 = 4. 6, und zieht die Ende 9 dieſer Ketten in den Punkt 6 zuſammen.

Es iſt für ſich klar, daß die zwo letzten Methoden nur, im Falle die Seiten des Dreyeckes 4. 5, 6 die Länge der Kette nicht überſteigen, angewendet werden können.

Bey der erſten Methode hat man keine Linie zu meſſen; ſie iſt alſo in allen Fällen am leichteſten auszuüben. Bey den übrigen Methoden iſt es gut, wenn 4. 5. ein gewiſſer z. B. der 10te Theil von 2. 3. iſt. Denn in dieſem Falle muß auch 5. 6. der 10te Theil von 1. 3, und 4. 6 der 10te Theil von 1. 2 ſeyn. Und noch beſſer iſt es, wenn 4. 5 ebenſoviel Schuhe oder Zolle, als 2. 3 Klaftern enthält. Denn in dieſem Falle enthält auch 5. 6 ebenſoviel Schuh oder Zolle, als 1. 3 Klaftern, und 4. 6. ebenſoviel Schuh oder Zolle, als 1. 2 Klaftern hat. Dort wird die Rechnung ſehr erleichtert, und hier iſt ſie gar nicht vonnöthen.

Fig. 138. 152. Iſt das gegebene Dreyeck 1. 2. 3, und man nimmt 1tens 1. 4 dem 10ten Theile von 1. 2 gleich, macht den Winkel 4 = 2 und ſucht den Durchſchnitt 5 des Schenkels 4. 5 und der Seite 1. 3; ſo wird das Dreyeck 1. 4. 5 dem Dreyecke 1. 2. 3 nach der erſten Methode ähnlich.

Fig. 140. Nimmt man 2tens 1. 4 dem 10ten Theile von 1. 2, und 1. 5 dem 10ten Theile von 1. 3 gleich; ſo wird das Dreyeck 1. 4. 5 dem Dreyecke 1. 2. 3 nach der 2ten Methode ähnlich.

Fig. 142. Nimmt man 3tens, weil der Winkel 2 nicht ausgeſtecket werden kann, in der Geraden 2. 3 einen Punkt 7 an, macht 1. 4 dem 10ten Theile von 1. 2, und 1. 6 dem 10ten Theile von 1. 7 gleich, und ſucht den Durchſchnitt 5 der Geraden 4. 6 und der Geraden 1. 3; ſo werden die Dreyecke 1. 4. 6 und 1. 2. 7, nach der 2ten Methode ähnlich, die Winkel 4 und 2 gleich, alſo die Dreyecke 1. 4. 5 und 1. 2. 3 nach der 1ten Methode ähnlich.

Nimmt

Nimmt man 4tens, weil 2. 3 gar nicht zugängig iſt, einen Punkt 6 an, macht 1. 7 dem 10ten Theile von 1. 6 gleich, ſodann das Dreyeck 1. 4. 7 dem Dreyecke 1. 6. 2 und das Dreyeck 1. 7. 5 dem Dreyecke 1. 6. 3 nach der erſten Methode ähnlich, indem man die Winkel in 7 den Winkeln in 6 gleich macht; ſo wird, weil 1. 7 der 10te Theil von 1. 6 iſt, auch 1. 4. der 10te Theil von 1. 2, und 1. 5 der 10te Theil von 1. 3, alſo das Dreyeck 1. 4. 5 dem Dreyecke 1. 2. 3 nach der 2ten Methode ähnlich. Fig. 144.

Nimmt man 5tens, anſtatt die Winkel in 7 den Winkeln in 6 gleich zu machen, in der Geraden 6. 3 einen Punkt 11 an, ſucht den Durchſchnitt 10 der Geraden 1. 11 und 6. 2, macht 1. 9 dem 10ten Theile von 1. 11 und 1. 8 dem 10ten Theile von 1. 10 gleich, und verlängert 7. 9 bis in 5, und 7. 8 bis in 4; ſo werden die Dreyecke 1. 7. 8 und 1. 6. 10, 1. 7. 9 und 1. 6. 11 nach der 2ten Methode ähnlich, die Winkel in 7 den Winkeln in 6 gleich, alſo die Dreyecke 1. 7. 5 und 1. 6. 3, 1. 7. 4 und 1. 6. 2 nach der 1ten Methode, und die Dreyecke 1. 4. 5 und 1. 2. 3 wieder nach der 2ten Methode ähnlich.

Mißt man endlich in jedem Falle die Gerade 4. 5, und multiplicirt die gefundene Anzahl Klaftern derſelben durch 10; ſo erhält man die Anzahl Klaftern der unzugängigen Geraden 2. 3.

153. Zieht man durch a und b auf ab die Senkrechten ac und bd, trägt von b an auf bd 6 gleiche Theile auf, führt durch alle Theilungspunkte die Gleichlaufenden mit ab, und zieht noch bc; ſo ſind die Dreyecke b. 1. 1, b. 2. 2, b. 3. 3 ꝛc. mit dem Dreyecke bdc ähnlich, weil ſie wegen der Gleichlaufenden alle Winkel wechſelweiſe gleich haben. Es iſt aber b 1 ein 6ter Theil, b 2 zwey ſechſte Theile, b 3 drey 6te Theile ꝛc. von bd, alſo iſt auch 1. 1 ein 6ter Theil, 2. 2 zwey 6te Theile, 3. 3 drey 6te Theile ꝛc. von cd. Wenn daher cd eine Klafter gilt; ſo gilt 1. 1 einen, 2. 2 zween, 3. 3 drey Schuh u. ſ. f. Fig. 145.

Fig. 146. Nimmt man auf bd 10 gleiche Theile, zieht wieder durch alle Theilungspunkte die Gleichlaufenden, und endlich noch bc; ſo ſind b1, b2, b3, ꝛc. ein, zween, drey 10te Theile von bd, alſo auch 1. 1, 2. 2, 3. 3 ꝛc. ein, zween, drey 10te Theile von cd. Gilt alſo cd 10 Klafter, ſo gelten 1. 1, 2. 2, 3. 3 ꝛc. eine, zwo, drey Klafter u. ſ. f.

Fig. 147. 148. Trägt man auf einer beliebigen Geraden ab mehrere gleiche Theile auf, zieht auf ab die Senkrechten ac und bd, nimmt Fig. 147. einen ſolchen Theil für eine Klafter an, und trägt von a gegen c 6 gleiche Theile auf, oder läßt Fig. 148. einen ſolchen Theil 10 Klafter gelten, und trägt von a gegen c 10 gleiche Theile auf, und zieht endlich nebſt den Gleichlaufenden die Gerade oc; ſo erhält man einen verjüngten **Maßſtab**, der Fig. 147. nach Klaftern und Schuhen, und Fig. 148. nach Klaftern eingerichtet iſt.

Fig. 136. 154. Iſt ein Winkel acb auf dem Felde gegeben, und man nimmt cp = cq von einer gewiſſen Anzahl Klaftern, und mißt die Sehne pq, beſchreibt ſodann auf dem Papiere aus einem Punkte o einer beliebigen Geraden om mit dem Halbmeſſer, der ebenſoviel Klaftern nach dem verjüngten Maßſtabe, als cp = cq im wirklichen Maße hat, einen Bogen mn, trägt die Sehne mn wieder von ebenſoviel Klaftern nach dem verjüngten Maße, als pq nach dem wirklichen Maße gefunden worden iſt, von m in n, und zieht endlich on; ſo haben die Dreyecke nom und pcq alle drey Seiten proportionirt; folglich ſind die Winkel o und c, welche den gleichnamigen Seiten mn und pq entgegenſtehen, gleich.

Iſt der Maßſtab ſehr klein; ſo kann man den Halbmeſſer om und die Sehne mn nach dem verjüngten Maße gleichvielmal, z. B. 10mal größer nehmen, als der Halbmeſſer cp und die Sehne pq nach dem wirklichen Maße angenommen und gefunden worden ſind.

Wenn eine Gerade mn auf dem Papiere ebenſoviel Klaftern nach dem verjüngten Maße, als eine Gerade pq

auf

auf dem Felde nach dem wirklichen Maße enthält; ſo werden dieſe zwo Geraden **gemäß** genennt.

155. Vermittelſt des verjüngten Maßſtabes, der Meßkette und Nägel läßt ſich alſo auf dem Papiere allemal ein Dreyeck 4. 5. 6, welches einem auf dem Felde gegebenen Dreyecke 1. 2. 3 ähnlich iſt, zeichnen. Fig. 137.

Nach der 1ten Methode, wenn man die Seite 4. 5 der Seite 2. 3 gemäß aufträgt, nach Vorigem den Winkel 5 = 3, und den Winkel 4 = 2 macht, und die Schenkel bis in 6 verlängert.

Nach der 2ten Methode, wenn man den Winkel 5 = 3 macht, 5. 6. gemäß 1. 3 und 4. 5 gemäß 2. 3 aufträgt, und noch 6. 4 zieht.

Nach der 3ten Methode, wenn man den Winkel 4 = 2 macht, 4. 5 gemäß 2. 3 aufträgt, aus 5 mit einem der Seite 1. 3 gemäßen Halbmeſſer den Schenkel 4 7 in 6 oder 7 ſchneidet, und endlich 6. 5 oder 7. 5 zieht, nachdem der Winkel 1 des gegebenen Dreyeckes 1. 2. 3 ein ſtumpfer, oder der Winkel 8 des gegebenen Dreyeckes 8. 2. 3 ein ſpitzer iſt.

Nach der 4ten Methode, wenn man 4. 5 gemäß 2. 3 aufträgt, aus 5 mit einem der Seite 1. 3 gemäßen Halbmeſſer den Bogen 6. 7 beſchreibt, dieſen Bogen aus 4 mit einem der Seite 1. 2 gemäßen Halbmeſſer in 6 ſchneidet, und endlich 6. 4, und 6. 5 zieht.

156. Iſt das gegebene Dreyeck 1. 2. 3 nicht ganz zugängig; ſo kann man Fig. 138. und 139 mo der Seite 1. 2 gemäß auftragen, den Winkel o = 1, und den Winkel m = 2 machen, und die Schenkel bis in n verlängern; Fig. 139. und 140. den Winkel o = 1 machen, om gemäß 1. 2, und on gemäß 1. 3 auftragen, und noch mn ziehen; Fig. 141. und 142. in der Geraden 3. 2 einen Punkt 7 annehmen, die Winkel in o den Winkeln in 1 gleich machen, om und oq den Seiten 1. 2 und 1. 7 gemäß auftragen, und endlich den Durchſchnitt n ſuchen; Fig. 143. und 144. einen Punkt 6 annehmen, oq gemäß 1. 6 auftragen, das Dreyeck

m o q dem Dreyecke 2. 1. 6 und das Dreyeck n o q dem Dreyecke 3. 1. 6 ähnlich zeichnen, und noch m n ziehen; endlich m n in jedem Falle nach dem verjüngten Maßſtabe meſſen, und ſo die Anzahl der Klaftern der unzugängigen Geraden 2. 3 finden.

Fig. 149. 157. Zieht man d c ſenkrecht auf a b, trägt den Halbmeſſer c a als eine Sehne von a in f, von b in e, von d in h, von d in g, und halbirt jeden dieſer Bögen a h, b f, f d u. ſ. f. in l; ſo wird der halbe Umfang in 12 gleiche Bögen jeden von 15 Graden eingetheilt: und theilt man ferner jeden dieſer 12 Bögen durch Verſuche erſtlich in drey gleiche, und ſodann wieder jeden dieſer Dritteln in 5 gleiche; ſo erhält man endlich 180 Bögen, jeden von einem Grade.

Macht man dieſe Eintheilung auf einer großen Maſchine a d b; ſo kann man vermittelſt dieſer durch die Einſchnitte längſt der Halbmeſſer c a, c l, c h u. ſ. f. auch ein kleines Inſtrument m q n ſehr genau eintheilen.

Fig. 150. Ein auf Meßing in 180 Grade eingetheilter Halbkreis m q n wird **Winkelmeſſer** genennt.

Leget man den Mittelpunkt c eines Winkelmeſſers m q n in den Scheitel und den Halbmeſſer c n auf den Schenkel c a eines auf dem Papiere gezeichneten Winkels b c a; ſo können die Grade dieſes Winkels auf dem Bogen n y gezählet werden. Und leget man den Mittelpunkt des Winkelmeſſers in einen Punkt c einer Geraden c a, ſo daß der Halbmeſſer c n über c a liegt; ſo kann man einen Bogen n y von ſoviel Graden, als man will, auf dem Papiere abſtechen, durch y die Gerade c b ziehen, und ſo aus jedem Punkte c auf einer Geraden c a einen Winkel b c a von einer gegebenen Anzahl Grade zeichnen.

Fig. 152. 158. Nachdem eine Ebene durch eine Vertikallinie c a geht, ſenkrecht oder ſchief auf c a iſt; ſo wird dieſe Ebene c a b f **vertikal**, c f g oder a d e **horizontal**, oder a b e **ſchiefliegend** genennt.

Weil alle Vertikallinien c a, f b und g e ſich erſt in dem Mittelpunkte der Erde ſchneiden; ſo können ſie in klei-

kleinen Gegenden, ohne in der Ausübung den geringſten annoch empfindlichen Fehler zu begehen, als gleichlaufend angenommen werden.

Dieſes vorausgeſetzt, ſind alle horizontalen Dreyecke c f g und a d e, ſo wie ihre Durchſchnitte c f und a d mit einer Vertikalen Ebene c a b f gleichlaufend, alſo jede zwey horizontalen Dreyecke c f g, und a d e zwiſchen drey Vertikallinien c a, f b und g e vollkommen gleich.

Es iſt ſchon oben erinnert worden, daß man unter der Entfernung zweener Punkte a und b auf der Oberfläche der Erde nicht die ſchiefliegende Gerade a b, ſondern die Horizontallinie a d oder c f, welche zwiſchen den Vertikallinien c a und f b enthalten iſt, verſtehe. Ebendieſes gilt auch von jedem Dreyecke auf der Oberfläche der Erde. Allzeit wird unter dem Dreyecke a b e, das horizontale a d e oder c f g, deſſen Scheitel in den Vertikallinien c a, f b und g e liegen, verſtanden; und nie bedeutet der Winkel a den ſchiefliegenden Winkel e a b, ſondern den horizontalen e a d oder g c f, den die vertikalen Ebenen c a b f und c a e g in ihrem Durchſchnitte c a machen.

Dieſer Winkel e a d iſt, weil die Ebenen e a d und c a b f ſenkrecht aufeinander ſind, nach Nro. 135. kleiner als e a b, wenn beede ſpitze, und größer als e a b, wenn beede ſtumpfe Winkel ſind.

159. Bringt man auf dem Durchmeſſer m n des Winkelmeſſers m q n zwey vertikale Abſehen m r und n s, und auf dem Lineal x y, das ſich um den Mittelpunkt c auf dem Halbkreiſe m q n drehen läßt, auch zwey x u und y z an; ſo werden vermittelſt dieſes **Winkelmeſſers mit Abſehen** die Grade eines jeden auf der Erde gegebenen Winkels e a b gefunden, wenn man 1tens dieſes Inſtrument m q n auf einem Geſtelle horizontal, und vermittelſt eines Senkbleys ſo über a ſtellet, daß der Mittelpunkt deſſelben in die Vertikallinie c a fällt, 2tens den Winkelmeſſer auf dem Geſtelle ſolang drehet, bis die vertikale Saite n s die ſenkrecht aufgehaltene Stange b f, dem durch den vertikalen Einſchnitt m r ſehenden Auge verdecket Fig. 151. Fig. 153.

und das Inſtrument vermittelſt einer Schraube an das Geſtell befeſtiget, 3tens das Lineal x y um den Mittelpunkt c auf die Stange g e drehet, und endlich die Grade des Bogens n y zählet.

Sind die Grade eines Winkes e a b bekannt; ſo kann man dieſen Winkel vermittelſt des Winkelmeſſers ohne Abſehen nach Nro. 157. auch auf dem Papiere zeichnen; folglich ſich bey allen Nro. 155. und Nro. 156. gegebenen Auflöſungen anſtatt der zu dieſem Ende angewandten Kette und Nägel dieſer beeden Winkelmeſſer bedienen.

Außer den Fehlern, welche man bey der Eintheilung dieſer Inſtrumente begeht, entſtehen noch viel größere dadurch, daß man die Winkel, welche nicht vollkommen in Grade ausgehen, nicht genau beobachten, und vielweniger genau auf dem Papiere abſtechen kann.

Fig. 151. Läßt man anſtatt der Eintheilung, nebſt dem Mittelpunkte c, in dem Umfange m q n auf dem Lineal die Punkte x und y, und auf dem Winkelmeſſer die Punkte m und n in Stahl ſo einſtechen, daß die zween letztern mit den drey erſtern in derſelben horizontalen Ebene, alſo um die Dicke des Lineals über der Ebene m q n liegen; Fig. 153. ſo können jene Fehler vermieden werden. Denn ſtellet man dieſen **Winkelmeſſer ohne Eintheilung** wie den vorigen über a, richtet den Durchmeſſer m n nach der Stange b f, und das Lineal xy nach der Stange e g, beſchreibt Fig. 154. mit dem Halbmeſſer c n aus einem Punkte o der Geraden o l einen Bogen l k, trägt die Sehne n y auf dieſen Bogen von l in k und zieht o k; ſo wird der Winkel k o l dem Winkel y c n oder g c f gleich.

Fig. 151. 153. Je länger die Saiten der Abſehen y z und n s, und die Einſchnitte der Abſehen x u und m r ſind, deſto beſſer kann man auf hoch oder tief liegende Gegenſtände ſehen; und zieht man in der vertikalen Ebene u x y z eine Saite u z; ſo kann man ſich, um das Lineal auf einen ſehr hohen, oder tiefen Gegenſtand zu richten, im Falle es vonnöthen iſt, auch dieſer Saite bedienen.

160.

160. Iſt der Winkelmeſſer mit oder ohne Eintheilung ſo eingerichtet, daß der Durchmeſſer mn horizontal und die Ebene mqn vertikal geſtellet werden kann; ſo laſſen ſich vermittelſt deſſelben auch die Winkel vertikaler Dreyecke auf dem Papiere zeichnen; und folglich alle zu- und unzugängigen Höhen meſſen. Fig. 151. 153.

Denn mißt man die Gerade pq = cd, macht den Winkel srt = acd, rt gemäß pq und zieht ts ſenkrecht auf tr; ſo wird das Dreyeck srt dem Dreyecke acd ähnlich, und st gemäß ad. Trägt man alſo st auf den verjüngten Maßſtab; ſo findet man die Anzahl der Klaftern der Höhe ad: und addirt man dazu noch dq = cp; ſo erhält man die ganze Höhe aq. Fig. 155. 156.

Läßt ſich pq nicht unmittelbar meſſen, ſo nimmt man einen Punkt f an, mißt pf, macht ru gemäß pf, das Dreyeck rut dem horizontalen pfq, und das Dreyeck srt dem vertikalen acd ähnlich, und verfährt wie zuvor. Fig. 157. 158.

Ebenſo findet man durch die horizontalen Dreyecke pfq, pfr und pfs, pq = cd, pr = ce und ps = cn, ſodann durch die vertikalen Dreyecke cda, ceb und cnm, die Höhen ad, be und nm; alſo auch (weil die Punkte d, e und n, ſo wie die Punkte x, y, und m in derſelben horizontalen Ebene liegen) Fig. 159. 160.

Fig. 159. ax = ad — mn
by = be — mn und
au = ad — be,

und Fig. 160. ax = mn — ad
by = mn — be und
au = be — ad.

161. Die Buſſol iſt nichts anders als eine Magnetnadel, welche ſich auf einen Stiften im Mittelpunkte eines in Grade eingetheilten Umfanges ringsum drehet. Sie wird in ein meſſingenes Gehäus eingeſchloſſen und mit einem gläſernen Deckel wider den Wind geſichert.

Dieſe Nadel hat die Eigenſchaft, daß ſich die Spitze ihrer mit Magnet beſtrichenen Hälfte beſtändig gegen einen

und denſelben Punkt am äuſerſten Horizonte unweit dem Nordpole wendet. Daher können ihre Richtungen in verſchiedenen Stellen einer kleinen Gegend allzeit ohne den geringſten annoch empfindlichen Fehler als gleichlaufend angenommen werden.

Fig. 161. 162. Stellet man, dieſes vorausgeſetzt, eine mit an das Gehäuſe befeſtigten Abſehen n s und m r, deren vertikale Ebene r m n s durch o Grade geht, verſehene Buſſol, ſo wie den Winkelmeſſer, über a; drehet die Abſehen 1tens auf die Stange b f, und zählt die Grade des Bogens n q, der zwiſchen der Geſichtslinie c f und der Richtung der Magnetnadel c q begriffen iſt, ſodann 2tens auf die Stange e g, und zählet die Grade des Bogens o q; zeichnet ſodann auf dem Papiere vermittelſt des Winkelmeſſers ohne Abſehen den Winkel y x z = n c q und den Winkel z x u = q c o; ſo wird auch der Winkel u x y = n c o = f c g.

Fig. 163. 161. Iſt die Buſſol auf einer meſſingenen rechtwinklichten Platte a b c d, deren Seiten a b und c d mit der Geſichtslinie m n gleichlaufen, befeſtiget; ſo kann man den beobachteten Winkel g c f auf einer gegebenen Geraden x y vermittelſt dieſer Buſſol ſelbſt zeichnen. Denn leget man die Seite a b an die Gerade x y, und drehet das Papier ſamt der Buſſol bis der Bogen n q dem beobachteten Winkel n c q gleich wird; hält ſodann das Papier feſt, und drehet die Buſſol um den Punkt x, bis der Bogen q o dem beobachteten Winkel q c o gleich wird, und zieht längſt a b die Gerade x u; ſo ſind die Geraden x y und x u mit c f und c g gleichlaufend, weil ſie mit den gleichlaufenden Richtungen der Buſſol gleiche Winkel machen; folglich iſt der Winkel y x u = n c o = f c g.

Fig. 164. 165. Iſt das Lineal auf dem Kreiſe um den Mittelpunkt c beweglich, die Punkte m, c und n auf dem Lineal und die Punkte p und q eines beliebigen Durchmeſſers auf dem Inſtrumente in dem nämlichen Umfange und in der nämlichen horizontalen Ebene als m und n angebracht; ſo bedarf man keiner weitern Eintheilung mehr. Denn beſchreibt man aus x mit dem Halbmeſſer c n einen Kreis, rich-

tet

tet die Nadel auf einem bemerkten Punkt r, und drehet das Lineal m n 1tens auf die Stange b f, trägt die Sehne n q von y in z; ſodann 2tens auf die Stange g e, trägt die Sehne q o von z in u und zieht x u; ſo wird der Winkel u x y = o c n = g c f.

Weil dieſe Buſſol den Fehlern der Eintheilung, der unvollſtändigen Beobachtung und Zeichnung der Winkel nicht mehr unterworfen iſt; ſo wird ſie der vorigen billig vorgezogen.

162. Mißt man in 1 die Winkel b und a, welche 1. 2 und 1. 3 mit der Richtung 1. 7 der Magnetnadel machen, und in 3 den Winkel c, den 3. 2 mit der Magnetnadel 3. 7 macht; ſo wird das Dreyeck 4. 5. 6 auf dem Papiere dem Dreyecke 1. 2. 3 auf der Erde ähnlich, wenn man 4. 5 der Seite 1. 3 gemäß aufträgt, ſodann den Winkel m = b macht, 5. 8 mit 4. 8 gleichlaufend zieht, noch die Winkel n = a und o = c zeichnet, und die Schenkel 4. 6 und 5. 6 bis in b verlängert. Fig. 166. 167.

Denn weil m — n = b — a; ſo iſt 6. 4. 5 = 2. 1. 3: und, weil d + b = p + m, und m = b iſt; ſo iſt auch p = d und p — o = d — c, alſo der Winkel 6. 5. 4 = 2. 3. 1.

Will man ſich dieſes Inſtruments anſtatt des Winkelmeſſers bedienen, ſo können vermittelſt deſſelben, die Aufgaben Nro 155. und Nro. 156. abermal, wie mit der Kette und den Nägeln aufgelöſet werden.

Weil der Winkel a = e und der Winkel c = f iſt, ſo kann man, anſtatt die Winkel a und c in 1 und 3 zu beobachten, die Winkel e und f in demſelben Punkte 2 meſſen, und wie zuvor den Winkel n = e und den Winkel o = f machen.

Man hat nämlich, da man vermittelſt der Buſſol ein Dreyeck nach der erſten Methode einem auf der Erde gegebenen Dreyecke ähnlich zeichnen will, allemal die drey Winkel, welche die drey Seiten mit den Richtungen der Magnetnadel machen, zu meſſen.

Iſt

Iſt nun einmal der eine b dieſer Winkel bekannt, ſo kann man ſich in was immer für einen Punkt 2 ſtellen, und die zween übrigen e und f beobachten. Dieſes iſt der große, aber einzelne Vortheil, den die Buſſol vor dem Winkelmeſſer mit Abſehen hat; übrigens iſt ihr Gebrauch lange nicht ſo zuverläßig als der Gebrauch des Winkelmeſſers; indem die Magnetnadel ihre Richtung, ſobald ſich Eiſen oder Stahl in der Nähe findet, ändert; und folglich den Unbehutſamen oft zu großen Fehlern verleitet.

163. So oft man vermittelſt eines aus dieſen Inſtrumenten auf dem Papiere einen Winkel, welcher einem auf der Erde gegebenen Winkel gleich iſt, zeichnet; ſo muß man zweyerley verrichten: 1tens den Winkel auf der Erde meſſen, und 2tens denſelben auf dem Papiere zeichnen.
Fig. 168. Stellet man einen **Meßtiſch** m n p q horizontal über jeden Punkt a, beſtimmet auf dem darauf wohl angeſpannten Papiere den Durchſchnitt c der Vertikallinie c a, den Durchſchnitt c 1 der vertikalen Ebene c a b f und den Durchſchnitt c 2 der vertikalen Ebene c a e g; ſo wird beydes auf einmal, alſo viel einfacher und genauer bewerkſtelliget.

Der Meßtiſch wird von jedem Inſtrumentenmacher verfertiget. Er muß, um gut zu ſeyn, folgende Eigenſchaften haben.

Das Geſtell deſſelben ſoll aus drey Füßen beſtehen, welche ſich an einer horizontalen ſtarken Scheibe um eine Winde drehen und feſt ſchrauben laſſen, damit es auch auf einem abhängigen Grunde feſt und aufrecht geſtellet werden kann.

Das Brett m n p q muß eben aus trockenem Lindenholze, das nicht mehr ſchwindet, geſchnitten, und mit Leiſten wider das Werfen geſichert ſeyn. Ferner muß es ſich auf der Scheibe des Geſtelles in einer horizontalen Lage ringsum drehen laſſen, und auf dieſelbe ohne die horizontale Lage zu verlieren, feſt geſchraubet werden können.

Fig. 169. Das meſſingene Lineal m n p q muß beynahe ſo weit als die Diagonale des Brettes reichen, und damit man auch ohne das Lineal um zu kehren zurücke ſehen kann, mit dop-

doppelten auf die Gerade ab ſenkrechten Abſehen verſehen ſeyn. Ferner müſſen die Gerade ab, der Einſchnitt ca, die Saite db, der Einſchnitt hd, die Saite fc und die Saite fh in einer und derſelben auf die Ebene m n p q ſenkrechten Ebene abhf liegen.

Geübtere ſtellen den Tiſch dem Augenmaße nach horizontal; Anfänger können eine Billardkugel, welche auf dem horizontal geſtellten Tiſche überall ruhet, zu Hilfe nehmen.

Der Durchſchnitt c der Ebene m n p q und der Vertikallinie ca, wird vermittelſt eines zu dieſem Ende verfertigten **Winkelhackens** ckh, der mit einem Senkbley versehen iſt, beſtimmet, und, mit einer vertikal eingeſteckten feinen Nadel, deren Köpfchen mit Sigelwachs zu dieſem Ende vergrößert worden iſt, bemerket. Fig. 168.

Leget man das Lineal an die Nadel c und drehet es um dieſelbe, bis die Saite des Abſehens bey 1 die in b vertikal aufgehaltene Stange b f dem durch den Einſchnitt des Abſehens bey c ſehenden Auge verdecket, und zieht längſt dem Lineal die Gerade c 1; ſo iſt dieſe der Durchſchnitt der vertikalen Ebene cabf und der horizontalen des Tiſches m n p q: und drehet man ferner das Lineal um die Nadel c auf die Stange g e, und zieht die Gerade c 2; ſo iſt dieſe der Durchſchnitt der vertikalen Ebene c a e g und des Tiſches Ebene; alſo wird der Winkel 2 c 1 dem horizontalen Winkel a des Dreyeckes e a b gleich. Fig. 170.

164. Nachdem man den Tiſch wie zuvor über a geſtellt, den Winkel 2 c 1 dem Winkel e a b gleich gemacht, und c 2 der Seite a e gemäß aufgetragen hat; ſo wird das Dreyeck 2 c 1 dem Dreyecke e a b ähnlich: Fig. 171.

Nach der erſten Methode, wenn man vermittelſt der Kette und Nägel, eines Winkelmeſſers oder einer Buſſol 1tens den Winkel 2 dem Winkel e gleich macht, oder 2tens den Winkel 4. 3. c dem Winkel b gleich zeichnet, und 2. 1 mit 4. 3 gleichlaufend zieht.

Nach der 2ten Methode, wenn man 1tens auch c 1 der Seite a b gemäß aufträgt, und 1. 2 zieht, oder 2tens in der Geraden b e einen Punkt s annimmt, nach der

Stan-

Stange su ſieht und c x zieht, ſodann cx der Geraden as gemäß aufträgt, und 2 x bis in 1 verlängert.

Nach der 3ten Methode, wenn man 1tens aus 2 mit einem der Geraden eb gemäßen Halbmeſſer die Gerade c 1, nachdem b ein ſtumpfer oder ſpitzer Winkel iſt, ein- oder auswärts in 1 ſchneidet, und 1. 2 zieht, oder 2tens aus 2 mit einem der Geraden es gemäßen Halbmeſſer die Gerade cx, nachdem s ein ſtumpfer oder ein ſpitzer Winkel iſt, ein- oder auswärts in x ſchneidet, und 2 x bis in 1 verlängert.

Nach der 4ten Methode endlich, wenn man aus c mit einem der Geraden as gemäßen Halbmeſſer einen Bogen beſchreibt, dieſen Bogen aus 2 mit einem der Geraden es gemäßen Halbmeſſer in x ſchneidet, und 2 x bis in 1 verlängert.

Das zuſammengeſetzte Verfahren nach jeder Methode iſt eben deswegen, weil es zuſammengeſetzet iſt, dem Einfachen 1ten Verfahren nach der 1ten, 2ten und 3ten Methode nachzuſetzen, und nie, außer im Falle der Noth, anzuwenden.

Fig. 172. 165. Nimmt man, nachdem der Winkel 2 c 1 dem Winkel a gleich gezeichnet, und 2. c der Seite ae gemäß aufgetragen iſt, den Tiſch von a weg, ſtellet ihn horizontal über e, richtet vermittelſt des Winkelhakens mit dem Senkbley den Punkt 2 in die Vertikallinie e 2, und vermittelſt des an die Nadeln 2 und c gelegten Lineals die Gerade 2. c in die vertikale Ebene cae 2, und beſtimmet durch das Lineal, welches man um die Nadel 2 auf die Stange bf drehet, den Durchſchnitt 2. 1 der vertikalen Ebene 2ebf und des Tiſches Ebene; ſo wird der Winkel 2 dem Winkel e ebenſo, wie der Winkel c dem Winkel a gleich, alſo das Dreyeck 2 c 1 dem Dreyecke eab nach der 1ten Methode ähnlich.

Fig. 173. Stellet man, nachdem der Winkel c dem Winkel a gleich gezeichnet, und c 2 der Geraden ae gemäß aufgetragen iſt, den Tiſch horizontal über die Gerade ab, ſo daß c gegen a, 1 gegen b und die Gerade c 1 in der ver-

tika-

tikalen Ebene c a b f liegt, drehet ſodann das Lineal um die Nadel in 2 auf die Stange eg, zieht 2. 3 und beſtimmt durch den Winkelhacken mit dem Senkbley den Punkt h der Vertikallinie 3. h auf der Erde; ſo wird der Winkel 2. 3. c dem Winkel e h a, ebenſo wie der Winkel c dem Winkel a gleich, alſo das Dreyeck 2. 3. c dem Dreyecke e h a nach der erſten Methode ähnlich.

Der Tiſch wird über die Gerade a b geſtellt, wenn man in dieſer Geraden einen Punkt h ſuchet, den Tiſch dem Auge nach über h ſtellet, das Lineal an die Gerade c 1 anlegt, und das Brett, bis die Geſichtslinie des Lineals die Stange a c ſchneidet, drehet, ſodann ohne das Lineal zu rücken auf die Stange b f zurück ſieht, und nachdem die Geſichtslinie rechts oder links neben der Stange b f vorbey geht, den Tiſch links oder rechts rücket, und wieder das Brett auf die Stange a c zu drehen ſolange von vorne anfängt, bis endlich die Geſichtslinie auf die Stange a c und b f zugleich eintrift.

Weil bey der vorigen Methode der Durchſchnitt 1 vorwärts der Nadel in 2, an welcher das Lineal liegt, bey dieſer aber rückwärts der Nadel in 2 geſchieht; ſo heißt jene Methode **vorwärts** = und dieſe **rückwärts einſchneiden.**

Nimmt man den Punkt h ſehr nahe bey b an; ſo kann man von b gegen a eine Klafterſtange in die Linie b a legen, und nachdem der Tiſch vermittelſt des Lineals auf die Stange a c gerichtet iſt, durch den Winkelhacken mit dem Senkbley verſuchen, ob die Gerade c 1 in der Ebene c a b f liegt, oder ob man den Tiſch noch rechts oder links zu rücken hat.

Stellet man den Tiſch dem Auge nach über b, richtet c 1 auf die Stange a c, merket beynahe den Punkt an, in welchem die Geſichtslinie 2. g die Gerade 1. c ſchneidet, und richtet endlich dieſen Punkt ſo über b, als wenn man vorwärts einſchneiden wollte; ſo wird der nach der Geraden 2, g vermittelſt des Lineals rückwärts eingeſchnittene Punkt 1 über b fallen: indem man auch dem Auge

nach

nach unmöglich ſoviel fehlen kann, daß der Fehler nach dem nämlichen Maaße auf dem Papiere größer, als die Breite des Plockes b auf der Erde iſt.

Fig. 169. Leget man ein Lineal an zwo Nadeln x und y, oder x und u einer geraden Linie x y u; ſo giebt ein geringer Fehler in y ſchon einen größern in u, dahingegen ein geringer Fehler in u einen noch geringern in y giebt. Daher muß man jede Geſichtslinie c 2 oder c 1, woran das Lineal beym Vorwärts- oder Rückwärtseinſchneiden wieder geleget wird, ſoweit, als das Lineal reichet, ausziehen, und noch ehe man daſſelbe rücket, an jedem Ende der Linie eine Nadel ſenkrecht einſtecken, damit man bey dem zweyten Stellen des Tiſches in e, h oder b vermittelſt dieſer zwo entfernten Nadeln das Lineal wieder ebenſo an die Gerade c 2 oder c 1 anlegen kann, als es auf dem erſten Stande an derſelben lag.

Das 1te Verfahren nach der 2ten und 3ten Methode Nro. 164. ſo wie das Vorwärts- und Rückwärtseinſchneiden Nro. 165. ſind vor allen andern Methoden zuverläßig; wenn nur das Lineal gut iſt, und die Durchſchnitte 1 oder 3 nicht nach ſehr ſchiefen Winkeln geſchehen, weil in dieſem Falle der geringſte Fehler, den man bey Anlegung des Lineals begeht, ſchon einen groſſen in Anſehung des Durchſchnittes 1 oder 3 verurſachet.

Fig. 174. 166. Leget man, nachdem der Tiſch horizontal über einen Punkt d der Geraden a d b geſtellet iſt, das Lineal an c, und richtet es vermittelſt der untern Abſehen auf die Stange b f; ſo müßen die obern Abſehen, wenn das Lineal gut iſt, auch auf die Stange a g gerichtet ſeyn. Und legt man ferner längſt der Geſichtslinie ein hölzernes ſenkrecht abgeſtoſſenes Lineal an das meſſingene, ſodann anſtatt dieſes das zweyte hölzerne an das erſtere, und endlich anſtatt des erſtern wieder das meſſingene; ſo müßen die untern Abſehen auf die Stange a g und die obern auf die Stange b f zeigen. Treffen ſowohl die untern als die obern Abſehen in beeden Lagen des Lineals ein; ſo ſind beyde Abſehen, die obern und die untern, gut und übereinſtimmig.

In

In dieſem Falle kann man bey der zwoten Stellung des Tiſches in e, h oder b das Lineal an dieſelbe Seite der Nadeln, an welcher es über a lag, wieder anlegen und nach den obern Abſehen auf die Stange a c zurücke ſehen. Sonſt muß man ſich nur an die guten Abſehen halten, und, wie da das Linial nur einerley Abſehen hat, ſolches über e, h oder b an die andere Seite der Nadeln, um auf die Stange a c zurück ſehen zu können, anlegen: in welchem Falle beſonders die Nadeln fein, gleich dick, und allzeit wohl ſenkrecht eingeſtecket ſeyn müßen. Fig. 172. 173.

Vermittelſt dieſes Inſtruments laſſen ſich die Aufgaben Nro 155. und Nro. 156. viel bequemer und genauer, als vermittelſt der Kette und Nägel, des Winkelmeſſers oder der Buſſol auflöſen.

167. Iſt die Gerade c 2 nach der Stange e g gezogen, und man drehet eine rechtwinklichte Buſſol m n o r, bis die Magnetnadel auf o Grade zeiget, und zieht längſt der Seiten derſelben die Geraden m n und n o, ſtellt ſodann den Tiſch, wo man immer will, horizontal über b, legt die Buſſol wie zuvor an die Geraden m n und n o, und drehet das Brett, bis die Magnetnadel wieder auf o Grade zeiget; ſo ſind die Richtungen der Buſſol n m s und n m t nach der Vorausſetzung gleichlaufend, alſo muß die Gerade c g, welche n m t in einem Punkte t ſchneidet, auch die Gerade n m s in einem Punkte s begegnen, und der Winkel x dem Winkel z gleich ſeyn; es iſt aber der Winkel x und u nur ein und derſelbe Winkel; folglich iſt auch u = z, alſo die Gerade c 2 auf dem Tiſche in b mit der Geraden c g oder 2 e gleichlaufend. Würde c g die Richtung der Magnetnadel nirgens begegnen; ſo wären die Geraden c 2 auf beeden Tiſchen mit dieſer Richtung alſo wieder mit einander gleichlaufend. Fig. 175.

Iſt der Tiſch über was immer für einen Punkt b ſo geſtellt, daß c 2 mit c g gleichläuft, und c 2 der Geraden 2 e gemäß aufgetragen, und man drehet das Lineal 1tens um die Nadel c auf die Stange a c und zieht c 1, ſodann 2tens um die Nadel 2 auf die Stange e g, und

zieht 2. 1, und ſucht noch vermittelſt des Senkbleys den Punkt b der Vertikallinie 1 b; ſo iſt wegen der Gleichlaufenden c 2 und c g der Winkel 2 c 1 = g c 1 = e a b, und der Winkel c 2. 1 = c g 1 = a e b, alſo das Dreyeck 1 c 2 dem Dreyecke b a e nach der erſten Methode ähnlich.

Läßt ſich die Buſſol ſeitwärts an das Brett feſt ſchrauben; ſo muß man, nachdem der Tiſch über a nach der Stange e g gerichtet iſt, den Grad, worauf die Magnetnadel zeiget, merken und ſodann über b das Brett drehen, bis die Magnetnadel wieder auf den vorigen Grad zeiget.

168. Vermittelſt eines jeden aus den abgehandelten Inſtrumenten läßt ſich auch auf dem Felde ein Winkel ausſtecken, welcher einem in Graden oder auf dem Papiere gegebenen Winkel gleich iſt.

Fig. Denn beſchreibt man 1tens aus dem Scheitel o des
136. gegebenen Winkels n o m mit einer gewiſſen Anzahl Klaftern des verjüngten Maßes einen Bogen m n, und mißt die Sehne m n nach ebendieſem Maße, nimmt ſodann auf der Erde c p gemäß o m, befeſtigt eine Kette in c gleich cp, und eine in p gemäß m n, und zieht die Ende dieſer zwo Ketten in einen Punkt q zuſammen; ſo wird der Winkel q c p dem Winkel n o m gleich.

Fig. Stellet man 2tens den Winkelmeſſer über a, und
153. richtet den Halbmeſſer c n über die gegebene Gerade a b, drehet ſodann das Lineal, bis der Bogen n y dem gegebenen Winkel gleich wird, und ſtecket in der Geſichtslinie c y die Stange g e ein; ſo wird der Winkel e a b dem gegebenen gleich.

Fig. Ebendieſes wird man auch vermittelſt des Winkel-
153. meſſers ohne Eintheilung erhalten, wenn man aus o des gege-
154. benen Winkels k o l mit dem Halbmeſſer des Inſtruments einen Bogen k l beſchreibt, das Lineal, bis die Sehne n y der Sehne k l gleich wird, dreht, und endlich in der Geſichtslinie c y noch die Stange e g einſtecket.

Stellt

Stellt man 3tens die Buſſol über a, richtet das Lineal auf die Stange bf, und beobachtet die Grade des Bogens qn, zieht ſodann die Grade des gegebenen Winkels von dieſem Bogen qn ab, dreht das Lineal, bis qo dem Unterſcheide gleich wird, und ſtecket endlich in der Geſichtslinie co die Stange ge ein; ſo wird der Winkel gcf oder eab dem gegebenen gleich. Fig. 161.

Ebendieſes erhält man auch vermittelſt der Buſſol ohne Eintheilung, wenn man aus dem Scheitel x des gegebenen Winkels uxy mit dem Halbmeſſer cn des Inſtruments einen Bogen yz beſchreibt, die Sehne nq von y in z trägt, das Lineal, bis die Sehne qo der Sehne zu gleich wird, drehet, und endlich noch in der Geſichtslinie co die Stange ge einſtecket. Fig. 164. 165.

Stellet man endlich 4tens den Scheitel c des auf dem Meßtiſche gegebenen Winkels 1c2 über a, ſo daß die Gerade c1 auf die Stange bf geht, legt ſodann das Lineal an den Schenkel c2, und ſtecket endlich in der Geſichtslinie c2 die Stange eg ein; ſo wird der Winkel eab abermal dem gegebenen Winkel 2c1 gleich. Fig 170.

169. Soll man auf der Erde ein Dreyeck eab, welches einem gegebenen Dreyecke 2c1 ähnlich iſt, ausſtecken; ſo macht man, nachdem ae gemäß c2 ausgemeſſen iſt, vermittelſt der Kette und Nägel, eines Winkelmeſſers, einer Buſſol, oder des Meßtiſches, nach der 1ten Methode den Winkel a dem Winkel c und den Winkel e dem Winkel 2 gleich, oder nach der 2ten Methode den Winkel a dem Winkel c gleich, und noch die Seite ab der Seite c1 gemäß, Fig. 171.

Dieſes Verfahren geht vom Kleinen in das Große, erfordert deswegen umſomehr Fleiß und Schärfe der Inſtrumente, und ſoll allemal, außer im Falle der Noth, vermittelſt des Meßtiſches geſchehen. Iſt das Dreyeck nicht auf dem Meßtiſche, ſondern auf einem andern Papiere gegeben; ſo muß es vorläufig auf dem Meßtiſche genau gezeichnet, jede Seite gleich das erſtemal über den ganzen

Tiſch ausgezogen, und an jedem Ende derſelben, noch ehe das Lineal gerücket wird, die Nadel eingeſtecket werden.

170. Bey den (Nro. 61. und Nro. 62.) gegebenen Auflöſungen kann zur Aufnahme und Ausſteckung der Winkel anſtatt der Meßkette und Nägel auch der Winkelmeſſer oder die Buſſol, beede mit oder ohne Eintheilung, beſonders aber der Meßtiſch mit Vortheile dienen.

Fig. 119. Nimmt man c d gemäß CD, und macht auf dem Tiſche über D die Winkel b d c und a d c den Winkeln B D C und A D C, ſodann auf demſelben Tiſche über C die Winkel a c d und b c d den Winkeln A C D und B C D gleich; ſo werden die Dreyecke b d c und B D C, a d c und A D C ähnlich, folglich b c und a c den Seiten B C und A C gemäß, alſo auch die Dreyecke c a b und C A B ähnlich. Stellet man daher den Winkel a über A; ſo läßt ſich A B vermittelſt der Geſichtslinie a b durch den Wald ausſtecken.

Fig. 177. Macht man das Dreyeck c a b dem Dreyecke C A B, wie zuvor, ähnlich, zieht c e gleichlaufend mit a b und b e ſenkrecht auf c e und ſtecket C H vermittelſt c e aus; ſo werden die Senkrechten b e und B E, wegen der ähnlichen Dreyecke b c e und B C E gemäß. Stecket man daher L H der Seite c e gemäß aus, und macht das Dreyeck G L H dem Dreyecke b c e ähnlich; ſo wird auch die Senkrechte G H der Senkrechten b e gemäß, alſo der Senkrechten B E gleich, und daher die auf G H Senkrechte G O die Verlängerung der unzugängigen und nur von vorne ſichtbaren Geraden A B ſeyn.

Von den ähnlichen Figuren.

171.

Fig. 178. 179. Sind die Dreyecke A B C und a b c, A D C und a d c ähnlich; ſo ſind die Verhältniſſe A C : a c, A B : a b, A D : a d, C B : c b, C D : c d gleich; alſo haben

die

die Dreyecke DAB und dab, DCB und dcb zwo Seiten proportionirt, und die eingeſchloſſenen Winkel bey A und a, C und c gleich; folglich ſind auch dieſe ähnlich, und das Verhältniß DB : db den vorigen gleich. Es haben alſo die Figuren ADBC und adbc alle Winkel gleich, und alle gleichnamigen Seiten proportionirt. Solche Figuren werden **ähnlich** genennt.

Macht man das Dreyeck afc dem Dreyecke AFC ähnlich; ſo haben die Figuren ADBFC und adbfc nach Vorigem wieder alle Winkel gleich, und alle gleichnamigen Seiten proportionirt; alſo ſind auch dieſe ähnlich.

Zeichnet man auf jeden zwo gleichnamigen Seiten AD und ad zwey ähnliche Dreyecke AED und aed; ſo ſind die Verhältniſſe AE : ae, DE : de, AD : ad und die Winkel A und a, D und d, E und e gleich, alſo die Figuren AEDBFC und aedbfc wieder ähnlich: und zeichnet man auf jeden zwo gleichnamigen Seiten DB und db zwo ähnliche Figuren DHGB und dhgb; ſo haben die gleichnamigen Seiten dieſer mit den gleichnamigen Seiten jener wieder einerley Verhältniß; ferner ſind beederſeits alle Winkel wechſelweiſe gleich, folglich auch die Figuren AEDHGBFC und aedhgbfc ähnlich. Zieht man endlich noch HE und he, GF und gf; ſo haben die Dreyecke HDE und hde, GBF und gbf zwo Seiten proportionirt und die eingeſchloſſenen Winkel gleich; alſo ſind auch die Figuren AEHGFC und aehgfc ähnlich.

Es läßt ſich alſo auf einer gegebenen Seite ac allemal eine Figur aedhgbfc, welche einer gegebenen Figur AEDHGBFC ähnlich iſt, zeichnen: wenn man nach der vierten Methode Nro. 150. die Dreyecke abc, adc, cbf, ade, dbh und dbg den Dreyecken ABC, ADC, CBF, ADE, DBH und DBG ähnlich zeichnet und die Scheitel derſelben ebenſo, wie in der gegebenen Figur durch Linien verbindet.

Weil man nichts ohne Fehler machen kann, ſo giebt der Fehler in b einen größern in f, der Fehler in d einen größern in e, und die Fehler in b und d einen noch viel grö-

größern in h oder g. Daher geſchieht es, daß, wenn man nach dieſem Verfahren eine große Reihe ähnlicher Dreyecke zeichnet, am Ende meiſtens ſehr merkliche Fehler entſtehen.

Fig. 180. 181. 172. Zieht man durch C und c auf AC und ac die Senkrechten PQ und pq, auf PQ die Senkrechten E 1, F 2, D 3, B 4, H 5 und G 6; ſo wird jeder Punkt e, d, h u. ſ. f. gefunden, wenn man nach Nro 149. 1tens c 1 der vierten Proportionirten zu AC, ac und C 1, und die auf pq Senkrechte e 1 der vierten Proportionirten zu AC, ac und E 1; 2tens c 3 der vierten Proportionirten zu AC, ac und C 3, und die auf pq Senkrechte d 3 der vierten Proportionirten zu AC, ac und D 3; 3tens c 5 der vierten Proportionirten zu AC, ac und C 5, und die auf pq Senkrechte h 5 der vierten Proportionirten zu AC, ac und H 5 gleich macht u. ſ. f.

Denn weil die rechtwinklichten Dreyecke CE 1 und ce 1, CD 3 und cd 3, CH 5, und ch 5, zwo Seiten proportionirt und die eingeſchloſſenen rechten Winkel gleich haben; ſo ſind auch die Verhältniſſe EC : ec, DC : dc, HC : hc dem Verhältniſſe AC : ac gleich; folglich haben die Dreyecke ECA und eca, DCE und dce, HCD und hcd u. ſ. f. zwo Seiten proportionirt und die bey C und c eingeſchloſſenen Winkel gleich; alſo ſind nach Vorigem die Figuren AEDHGBFC und aedhgbfc ähnlich.

Bey dieſem Verfahren wird ein jeder aus den Punkten e, d, h u. ſ. f. unabhängig von den andern beſtimmt: es kann alſo der Fehler, welchen man bey der Beſtimmung eines jeden Punktes begeht, nimmermehr in die Beſtimmung eines andern einflieſſen. Daher muß dieſe letztere Methode der Vorigen allzeit vorgezogen werden.

Fig. 182. 183. 173. Sind die Seiten größer, als daß man ſie bequem mit dem Zirkel faſſen kann; ſo trägt man eine beliebige Linie C 7 beederſeits von C an mehrmal auf AC und PQ, und zieht durch alle Endepunkte dieſer Linie

mit

mit AC und PQ die Gleichlaufenden, ſo daß die gegebene Figur mit gleichen Quadraten ganz überzogen wird: ſodann ſucht man zu AC, ac und C7 die vierte Proportionirte c8, und trägt ſolche beederſeits von c an eben ſo oft auf ac und pq, als man C7 auf AC und PQ getragen hat; endlich nimmt man um einen jeden Punkt e zu finden auf der Seite des Quadrates, in welches der Punkt e fällt, n1 der vierten Proportionirten zu AC, ac und m1, und die Senkrechte e1 der vierten Proportionirten zu AC, ac und E1 gleich u. ſ. f.

Um auf das genaueſte zu verfahren, trägt man n1 und 1e beederſeits am äußerſten Rande des ganzen Rechteckes auf, und legt das Lineal 1tens an die äußerſten Punkte 1. 1. und zieht 1e, und 2tens an die äußerſten Punkte ee, und ſchneidet 1e in e u. ſ. f.

Anwendung.

174. Eine auf der Oberfläche der Erde gegebene Figur **aufnehmen** heißt nichts anders, als auf dem Papiere eine Figur zeichnen, welche der gegebenen ähnlich iſt, vorausgeſetzt, es liegen alle Punkte der gegebenen Figur in den Durchſchnitten, welche die durch dieſe Punkte gezogenen Vertikallinien mit einer und derſelben horizontalen Ebene machen.

Aehnliche Figuren entſtehen durch die Zuſammenſetzung ähnlicher Dreyecke. Es haben alſo bey der Aufnahme ähnlicher Figuren wieder eben jene Methoden ſtatt, welche bey der Aufnahme ähnlicher Dreyecke gezeiget worden ſind. Fig.

175. Bedienet man ſich der Meßkette und Nägel; ſo 184. wird die Figur mabcdn auf dem Papier der Figur 185. MABCDN auf der Erde ähnlich:

Nach der erſten Methode, wenn man die Halbmeſſer MP und NQ von einer gewiſſen Anzahl Klaftern nimmt, und die Sehnen P1, P2, P3, P4, Q1, Q2, Q3, und Q4 mißt, ſodann auf dem Papiere mn gemäß MN, und die Halbmeſſer mp und nq gemäß MP

und NQ nimmt, die Sehnen p 1, p 2, p 3, p 4, q 1, q 2, q 3 und q 4 den auf der Erde gemeſſenen Sehnen gemäß aufträgt, endlich noch die Halbmeſſer m 1 und n 1 bis in a, m 2 und n 2 bis in b, m 3 und n 3 bis in c, m 4 und n 4 bis in d verlängert, und die Punkte m, a, b, c, d und n wie ihre gleichnamigen auf der Erde mit einander verbindet.

Fig. Nach der zwoten Methode, wenn man 1tens die
186. Winkel m wie zuvor den Winkeln M gleich macht, und
187. die Seiten mn, ma, mb, mc und md den gemeſſenen Seiten MN, MA, MB, MC und MD gemäß aufträgt.

Fig. Oder wenn man 2tens in der Geraden NC einen
188. Punkt Z annimmt, und die Durchſchnitte Y, X und U ſucht,
189. ſodann die Winkel m den Winkeln M gleich macht, die Geraden mn, mz, my, mx und mu den gemeſſenen Geraden MN, MZ, MY, MX und MU gemäß aufträgt, und noch nz bis in c, ny bis in d, nx bis in b und nu bis in a verlängert.

Fig. Oder wenn man 3tens ma gemäß MA und den
190. Winkel a gleich A, ab gemäß AB und den Winkel b
191. gleich B, bc gemäß BC und den Winkel c gleich C, cd gemäß CD und den Winkel d gleich D, und dn gemäß DN macht.

Genauer wird man nach dieſem Verfahren den Punkt A durch M, B durch A, C durch B, ſodann N durch M, und D durch N beſtimmen.

Fig. Oder wenn man 4tens A 1, B 2, C 3, D 4 ſenk-
190. recht auf MN ausſtecket, ſodann m 1, m 2, m 3, m 4,
191. mn gemäß M 1, M 2, M 3, M 4, MN und die Senkrechten a 1, b 2, c 3, d 4 gemäß A 1, B 2, C 3, D 4 aufträgt.

Fig. Nach der dritten Methode, wenn man 1tens die
184. Winkel m wie nach der erſten Methode den Winkeln M
185. gleich macht, und mn gemäß MN aufträgt, ſodann aus n mit Halbmeſſern, welche den Seiten ND, NC, NB und NA gemäß ſind, die Schenkel md, mc,

mb,

m b und m a wegen der ſpitzen Winkel D, C, B und A auswärts in d, c, b und a ſchneidet.

Oder wenn man 2tens in der Geraden N C einen Punkt Z annimmt, die Durchſchnitte Y, X und U ſucht, die Winkel m den Winkeln M gleich macht, und m n gemäß M N aufträgt, ſodann aus n mit Halbmeſſern, welche den Seiten N Z, N Y, N X und N U gemäß ſind, den Schenkel m z in z und y auswärts, und in x und u einwärts ſchneidet, endlich noch n z bis in c, n y bis in d, n x bis in b und n u bis in a verlängert. Fig. 188. 189.

Oder wenn man 3tens die Winkel m den Winkeln M gleich macht, m a gemäß M A aufträgt, ſodann aus a mit einem der Seite A B gemäßen Halbmeſſer m b auswärts in b, aus b mit einem der Seite B N gemäßen Halbmeſſer m n auswärts in n, aus n mit einem der Seite N C gemäßen Halbmeſſer m c einwärts in c, und aus c mit einem der Seite C D gemäßen Halbmeſſer m d einwärts in d ſchneidet. Fig. 192. 193.

Genauer wird man A durch M, B durch A, N durch B, ſodann D durch M, und C durch D beſtimmen.

Nach der vierten Methode, wenn man 1tens m n gemäß M N aufträgt, aus m mit Halbmeſſern, welche den Seiten M A, M B, M C, M D gemäß ſind, Bögen beſchreibt, und dieſe Bögen aus n mit Halbmeſſern, welche den Seiten N A, N B, N C, N D gemäß ſind, in a, b, c und d ſchneidet. Fig. 184. 185.

Oder wenn man 2tens die Winkel in m den Winkeln in M gleich macht, in N C einen Punkt Z, in N D einen Punkt Y, in N B einen Punkt X und in N A einen Punkt U annimmt, ſodann m n gemäß M N aufträgt, aus m mit Halbmeſſern, welche M Z, M Y, M X, M U gemäß ſind, Bögen beſchreibt, dieſe Bögen aus n mit Halbmeſſern, welche N Z, N Y, N X, N U gemäß ſind, in z, y, x und u ſchneidet, endlich n z bis in c, n y bis in d, n x bis in b und n u bis in a verlängert. Fig. 188. 189.

Fig. 190. 191. Das 4te Verfahren nach der zwoten Methode iſt, weil es nur die Zeichnung rechter Winkel erfordert, aus allen das einfachſte.

Fig. 194. 195. Und beſtimmt man vermittelſt eines Inſtruments A, welches aus zweyen aufeinander rechtwinklichten Linealen mit Abſehen beſteht, die Hauptſenkrechten in B, C, D, E &c. die kleinern Senkrechten aber in 1, 2, 3, 4. ꝛc. nach dem Augenmaße; ſo kann nach dieſem Verfahren allein eine ganze Gegend ſehr geſchwind und zuverläßig aufgenommen werden.

177. Bedient man ſich, um die Winkel auf dem Papiere den gegebenen Winkeln auf der Erde gleich zu zeichnen, anſtatt der Meßkette und Nägel des Winkelmeſſers mit oder ohne Eintheilung nach Nro. 159, oder der Buſſol mit oder ohne Eintheilung nach Nro. 161.; ſo laſſen ſich übrigens wieder alle im Vorhergehenden angezeigten Methoden ohne Unterſcheide anwenden.

Fig. 196. 197. 178. Nach Vorigem wird die Buſſol nur als Winkelmeſſer gebraucht; der eigene Gebrauch derſelben um eine Figur MABCDN aufzunehmen iſt folgender:

Nach der erſten Methode trägt man mn gemäß MN auf, mißt in M den Winkel oMN, den die Gerade MN mit der Richtung der Magnetnadel oM macht, in A die Winkel oA1 und oA2, in B die Winkel oB1 und oB2, in C die Winkel oC1 und oC2, und in D die Winkel oD1 und oD2, macht ſodann den Winkel omn gleich oMN, und zieht no gleichlaufend mit mo, ferner die Winkel oma, omb, omc, omd den Winkeln oA1, oB1, oC1, oD1, und die Winkel ona, onb, onc, ond den Winkeln oA2, oB2, oC2, oD2, gleich, und verbindet endlich die Durchſchnitte a, b, c, d wie die gleichnamigen Punkte A, B, C, D auf der Erde.

Fig. 198. 199. Nach der zwoten Methode mißt man MA, AB, BC, CD, DN, und in A die Winkel oA1, oA2, in C die Winkel oC3, oC4, und in N noch den Winkel oN5, macht die Winkel oma, om2, om3,

om4, om5 den Winkeln oA1, oA2, oC3, oC4, oN5 gleich, ſodann ma gemäß MA, ab gleichlaufend mit m2 und gemäß AB, bc gleichlaufend mit m3 und gemäß BC, cd gleichlaufend mit m4 und gemäß CD, und dn endlich gleichlaufend mit m5 und gemäß DN.

Nach der dritten Methode mißt man nebſt den Seiten MA, AB, BC, CD, DN die Winkel oA1, oB2, oC3, oD4, oN5, macht dieſen gemeſſenen Winkeln die Winkel oma, omb. omc, omd, omn gleich, nimmt ma, gemäß MA, und ſchneidet aus a mit einem AB gemäßen Halbmeſſer mb auswärts in b, aus b mit einem BC gemäßen Halbmeſſer mc auswärts in c, aus c mit einem CD gemäßen Halbmeſſer md einwärts in d, und aus d mit einem DN gemäßen Halbmeſſer mn einwärts in n. Fig. 200. 201.

Nach der erſten Methode wird jeder Punkt A, B. C oder D durch M und N unabhängig von den andern beſtimmt; nach der zwoten und dritten Methode aber fließt der Fehler, den man bey jedem Punkte begeht, allemal auch in die Beſtimmung des darauf folgenden Punktes ein. Daher muß die erſtere Methode den zwo leztern allzeit vorgezogen werden.

179. Bey der Aufnahme einer ganzen Gegend muß man die Hauptpunkte A, B, C, D, E, F, G, H, L, wodurch die Arbeit fortgeſetzet wird, von den Punkten einzelner Figuren, welche durch jene beſtimmet werden müßen, wohl unterſcheiden. Jene werden ſo gewählet, daß man ſie durch Dreyecke von beynahe gleichgroßen Seiten verbinden, und daraus, ſoviel möglich iſt, ringsum die einzelnen Figuren überſehen kann. Dieſe Dreyecke, welche die ganze Gegend überdecken, müßen allzeit nach der einfachſten und zuverläßigſten Methode aufgenommen werden. Die Punkte einzelner Figuren hingegen kann man nach jeder Methode, welche ſich für die Figur ſchicket, beſtimmen. Die Hauptpunkte A, B, D, L, G, über welche man das Inſtrument ſtellet, heißen **Standpunkte**, Fig. 203.

und

und jene C, H, F, E, über welche man das Inſtrument nicht ſtellen kann, wie z. B. die Spitze der Thüeme ſind, werden **Fixpunkte** genennt.

Fig. 202. 203. 180. Verbindet man die Buſſol ohne Eintheilung mit dem Winkelmeſſer ohne Eintheilung in demſelben Inſtrumente, Fig. 202, ſo daß der Halbmeſſer c m des Winkelmeſſers das Doppelte von dem Halbmeſſer c n der Buſſol iſt; ſo läßt ſich damit eine Gegend ſehr geſchwind und genau aufnehmen, wenn man vermittelſt des Winkelmeſſers unabhängig von der Buſſol die Hauptpunkte A, B, C, D, E, F, G, H, L, und durch dieſe vermittelſt der Buſſol nach Nro. 178. die Punkte einzelner Figuren beſtimmet.

Nur iſt dabey zu merken, daß, wenn z. B. in einem Dreyecke BLC nebſt dem Winkel B der Winkel L, welcher der beſtimmten Seite BC entgegenſteht, beobachtet wird, man aus jedem Punkte 3 der unbeſtimmten Seite b l den Winkel 4. 3. b dem beobachteten BLC gleich mache, und ſodann cl gleichlaufend mit 4. 3 ziehe.

Fig. 204. 181. Stellet man den Meßtiſch über M, und macht nach Nro. 163. die Winkel amn, bmn, cmn, dmn den Winkeln AMN, BMN, CMN, DMN gleich; ſo wird die Figur mabcdn der Figur MABCDN ähnlich:

Nach der erſten Methode, wenn man m n gemäß MN aufträgt, vermittelſt der Kette und Nägel, des Winkelmeſſers oder Buſſol, die Winkel anm, bnm, cnm, dnm den Winkeln ANM, BNM, CNM, DNM gleich zeichnet, und die Punkte m, a, b, c, d und n ſo wie die gleichnamigen auf der Erde verbindet.

Fig. 205. Nach der zwoten Methode, wenn man 1tens m n, ma, mb, mc und md den Geraden MN, MA, MB, MC und MD gemäß aufträgt.

Fig. 206. Oder wenn man 2tens in NC einen Punkt Z annimmt, die Durchſchnitte Y, X und U ſucht, mn, mz, my, mx, mu den Geraden MN, MZ, MY, MX,

MU

MU gemäß aufträgt, und noch nz, bis in c, ny bis in b, nx bis in d, und nu bis in a verlängert.

Nach der dritten Methode, wenn man 1tens mn gemäß MN aufträgt, aus n mit Halbmeſſern, welche den Seiten NA, NB, NC und ND gemäß genommen werden, ma in a, mb in b, mc in c, und md in d auswärts ſchneidet. Fig. 204.

Oder wenn man 2tens in NC einen Punkt Z annimmt, die Durchſchnitte Y, X und U ſucht, mn gemäß MN aufträgt, aus n mit Halbmeſſern, welche den Geraden NZ, NY, NX und NU gemäß ſind, mz in z und y auswärts, und in x und u einwärts ſchneidet, und noch nz bis in c, ny bis in b, nx bis in d, und nu bis in a verlängert. Fig. 206.

Oder wenn man 3tens ma gemäß MA aufträgt, aus a mit einem AB gemäßen Halbmeſſer mb auswärts in b, aus b mit einem BC gemäßen Halbmeſſer mc auswärts in c, aus c mit einem CD gemäßen Halbmeſſer md einwärts in d, und aus d mit einem DN gemäßen Halbmeſſer mn einwärts in n ſchneidet. Fig. 207.

Nach der vierten Methode, wenn man in NC einen Punkt Z, in NB einen Punkt Y, in ND einen Punkt X, und in NA einen Punkt U annimmt, mn gemäß MN aufträgt, aus m mit Halbmeſſern, welche MU, MX, MY und MZ gemäß genommen werden, Bögen beſchreibt, dieſe Bögen aus n mit Halbmeſſern, welche NU, NX, NY und NZ gemäß ſind, in u, x, y und z ſchneidet, und noch nu bis in a, nx bis in d, ny bis in b, und nz bis in c verlängert. Fig. 206.

182. Unter dieſen Methoden verſteht man das Aufnehmen aus einem Stande, aus zween oder mehrern Ständen nimmt man auf

Nach der erſten Methode, wenn man, nachdem die Winkel m den Winkeln M wie zuvor gleich gezeichnet ſind, und mn gemäß MN aufgetragen iſt, 1tens nach Nro. 165. den Meßtiſch über N ſtellet, und vermittelſt des Fig. 208.

Li-

Lineals an der Nadel n die Geraden m a in a, m b in b, m c in c, und m d in d vorwärts einſchneidet.

Fig. 209. Oder wenn man 2tens nach demſelben Nro. 165. den Meßtiſch über A ſtellet, vermittelſt des Lineals an der Nadel n die Gerade m a in a rückwärts, und ſodann vermittelſt des Lineals an der Nadel a wieder die Geraden m b in b, m c in c, und m d in d vorwärts einſchneidet.

Fig. 210. Nach der zwoten Methode, wenn man über A den Winkel a gleich A, a m gemäß A M und a b gemäß A B, über B den Winkel b gleich B und b c gemäß B C, über C den Winkel c gleich C und c d gemäß C D, und endlich über D, den Winkel d gleich D und d n gemäß D N macht.

Fig. 211. 183. Iſt m n mit M N gleichnamig, und die Richtung p q der Buſſol auf dem Tiſche ſchon einmal beſtimmt; ſo verfährt man nach der erſten Methode, wenn man nach Nro. 167. vermittelſt der Nadeln in m und n über A den Punkt a, über B den Punkt b, über C den Punkt c, und über D den Puukt d beſtimmt.

Fig. 212. Oder nach der zwoten Methode, wenn man über A (die Nadel in m) m a gemäß M A und (die Nadel in a) a b gemäß A B, ſodann über C (die Nadel in b) b c gemäß B C und (die Nadel in c) c d gemäß C D zieht und aufträgt.

Fig. 213. Oder endlich nach der dritten Methode, wenn man (die Nadel in m) über A m a, über B m b, über C m c und über D m d zieht, m a gemäß M A aufträgt, und aus a mit einem A B gemäßen Halbmeſſer m b auswärts in b, aus b mit einem B C gemäßen Halbmeſſer m c auswärts in c, und aus c mit einem C D gemäßen Halbmeſſer m d einwärts in d ſchneidet.

Das zweyte und dritte Verfahren iſt lange nicht ſo zuverläßig, als das erſte.

Fig. 203. 184. Beſtimmet man die Hauptpunkte A, B, C, D, E, F, G, H, L durch Vorwärts, und Rückwärts-

ein-

einſchneiden, die Punkte einzelner Figuren aber durch jede Methode, welche nach der Abſicht der Aufnahme wegen ihrer Zuverläßigkeit, und Geſchwindigkeit beſonders auf jede Figur paſſet; ſo wird eine ganze Gegend viel geſchwinder und zuverläßiger, als vermittelſt des Winkelmeſſers in Grund geleget.

185. In Feſtungsplanen müßen die Punkte der Werker eben ſo genau, als die Hauptpunkte, alſo nach den einfachſten Methoden, ohne daß man die Winkel mit Winkelmeſſern, Buſſol oder Kette und Nägel beſtimmet, aufgenommen werden.

Ebendieſes muß man auch bey Verfertigung der Wirthſchaftsplane in Anſehung der Endepunkte der verſchiedenen Eigenthümern zugehörigen Grundſtücke beobachten.

Bey Feldplanen liegt oft wenig daran, ob die Punkte einzelner Figuren etliche Schuh oder auch Klaftern abweichen oder nicht, dieſe können alſo nach Nro. 183. Fig. 211. 212. oder 213. vermittelſt der richtig beſtimmten Hauptpunkte M und N garwohl mit der Buſſol, oder nach was immer für einer auf jede Figur leicht anwendbaren Methode beſtimmet werden. Hier iſt im Ganzen Genauigkeit und im Einzelnen Geſchwindigkeit vonnöthen. Nichts muß den Officier an ſeiner Arbeit hindern können. Faſt bey jeder Witterung kann er die nöthigen Hauptpunkte auf dem Felde annehmen, nach den Geraden, welche ſie verbinden, die einzelnen Figuren durch Kette und Nägel, Winkelmeſſer oder Buſſol beſtimmen, und ſolche, nachdem er bey nur etlichen Stunden guter Witterung die Hauptpunkte genau aufgenommen hat, in den Plan gehörig eintragen. Uibrigens ſollen in dieſen Planen die Brünnen, Quellen, Gräben, Bäche, Flüſſe, ſteilen Ufer, Furten und Brücken derſelben, die Moräſte und ſtehenden Wäſſer, die Fußſteige, gemeinen Fahrwege, Landſtraſſen, Hohlwege, Gruben, Vertiefungen, Erhöhungen, Abdachungen, Hügel, Berge, deren felſichte, ſteile und gelinde Fälle, Gebüſche, Geſträuche, dünne und dichte Waldungen, die Umfänge, beynahe die Gaſſen und

Anzahl der Gebäude der Städte und Dörfer, die Aecker, Wieſen, Weingärten, Kapellen, Säulen, Kreuze und alle ſichtbaren Zeichen auf dem Felde wohl ausgedrücket und unterſchieden werden.

Fig. 214. 215. 186. Es ſeyen drey Punkte o, m und n auf dem Tiſche nebſt ihren gleichnamigen O, M und N auf der Erde gegeben, man ſoll auf dem Tiſche den vierten d, welcher mit D, wo man ſteht, auf der Erde gleichnamig iſt, beſtimmen.

Stellet man den Tiſch horizontal über D, ſucht den Punkt r der Vertikallinie Dr, und zieht rt, rp und rq; ſo wird der Winkel trp = ODM = odm, und prq = MDN = mdn. Zieht man daher durch r auf rp die Senkrechte us, trägt das Komplement qrs des Winkels prq oder mdn aus m und n auf mn gegen d, Fig. 214. oder auf die entgegengeſetzte Seite in Anſehung d Fig. 215. nachdem dieſes Komplement bejahend oder verneinend iſt, und beſchreibt aus dem Durchſchnitte c der Schenkel mc und nc mit dem Halbmeſſer cm = cn einen Bogen mdn; ſo iſt dieſer nach Nro. 77. der geometriſche Ort des Punktes d: und trägt man auch das Komplement tru des Winkels trp oder odm ebenſo aus o und m auf om, und beſchreibt mit dem Halbmeſſer em = eo den Bogen mdo; ſo iſt auch dieſer der geometriſche Ort des Punktes d, alſo der mit D gleichnamige Punkt d der Durchſchnitt dieſer beeden Bögen.

Fig. 216. 217. Oder ſetzet man lieber, es wäre durch die zween äuſſerſten Punkte O und N, und den Punkt D ein Umfang gezogen, und DM bis an einen Punkt x dieſes Umfanges verlängert; ſo iſt nach Nro. 84. in dem Vierecke ODNX jeder Winkel, welchen die eine Diagonale mit einer Seite macht, dem Winkel, welchen die andere Diagonale mit der jener Seite entgegengeſetzten Seite macht, gleich. Zeichnet man daher den Winkel onx = trp = ONX, und den Winkel nox = qrp = NOX; ſo wird das Dreyeck nox dem Dreyeck NOX ähnlich: zeichnet man alſo ferner den Winkel ond = oxm = OXM = OND, und

und den Winkel nod = nxm = NXM = NOD; ſo wird auch das Dreyeck nod dem Dreyecke NOD ähnlich, alſo der Punkt d mit D gleichnamig.

187. Dieſe zwo Methoden, durch drey Punkte den vierten zu beſtimmen, haben zwar nach der Theorie ihre vollkommene Richtigkeit, bleiben aber doch wegen der vielfachen Zeichnung der Winkel, welche ſie erfordern, beſonders wenn in den Punkten m, n, o und r Nadeln eingeſtecket werden, ſehr unzuverläßig. Man muß ſie alſo allzeit, ſoviel es möglich iſt, beſonders aber in dem Falle vermeiden, in welchem die drey Punkte M, N und O Thürme ſind, deren gleichnamige Punkte m, n und o durch eine trigonometriſche Aufnahme beſtimmet, und auf dem Meßtiſche aufgetragen worden ſind; indem hier die ganze Aufnahme deſſelben Tiſches von dieſem vierten Punkte abhängt.

In dieſem Falle kann man viel einfacher nach Nro. 165. die Gerade mn über MN richten, und nach der Geraden oO rückwärts in einem Punkte d einſchneiden, den Punkt D vermittelſt des Winkelhackens mit dem Senkbley auf der Erde beſtimmen, und ſodann die Arbeit wie ſonſt fortſetzen. Fig. 218.

188. Sind zween Thürme M und N auf der Erde und ihre gleichnamigen Punkte m und n auf dem Tiſche gegeben, und man nimmt eine beliebige Gerade CD auf der Erde und 1. 2 auf dem Tiſche an, und macht über C die Winkel 1 den Winkeln C, und über D die Winkel 2 den Winkeln D gleich; ſo wird die Figur 1. 3. 4. 2 der Figur CMND ähnlich. Sieht man alſo mn und 3. 4 als gleichnamige Seiten an, und zeichnet nach Nro. 171. 172. 173. auf mn eine Figur cmnd, welche mit der Figur 1. 3. 4. 2 ähnlich iſt; ſo werden auch die Figuren cmnd und CMND ähnlich, alſo die Punkte c und d mit den Punkten C und D gleichnamig. Da dieſe Zeichnung viel genauer, als die Zeichnung der Winkel iſt; ſo iſt ſie allzeit den zwo Methoden Nro. 186. vorzuziehen, Fig. 219.

und jedesmal, im Falle die Methode Nro. 187. durch rückwärts einſchneiden nicht ſtatt haben kann, aber ohne Gebrauch der Nadeln anzuwenden.

Fig. 220. Iſt die Gerade M N in Klaftern gegeben, wie es nach einer trigonometriſchen Aufnahme wirklich geſchieht; ſo wird dieſe Methode nach einfacher und zuverläßiger, wenn man 1. 2 dem Augenmaße nach ſo annimmt, daß 3. 4. eben dahin fällt, wo man m n vermöge der Lage der Gegend, die man aufnehmen will, annehmen ſoll. Denn trägt man, nachdem die Figur 1. 3. 4. 2 wie zuvor der Figur C M N D ähnlich gemacht worden iſt, m n gemäß M N auf 3. 4 von 4 gegen 3, und zieht m c mit 3. 1 und m d mit 3. 2 gleichlaufend; ſo wird die Figur c m 4 d der Figur C M N D wieder ähnlich, alſo die Punkte c und d mit den Punkten C und D gleichnamig.

Fig. 218. 220. Wären nach einer trigonometriſchen Aufnahme drey Thürme O, M und N gegeben, und in keiner Seite des Dreyeckes O M N ein Punkt D anzutreffen, woraus man alle drey Thürme ſehen könnte; ſo müßte man, um auf das genaueſte zu verfahren, erſtlich die Punkte c, d, m und 4 oder n wie zuvor beſtimmen, und ſodann erſt den Punkt o nach den gegebenen Maßen auftragen.

Fig. 225. 189. Wenn mehrere Tiſche um eine größere Gegend aufzunehmen anzuſtellen ſind; ſo wählet man eine Standlinie A B, ſoviel es ſeyn kann, mitten in der Gegend, ſtellet einen Tiſch ſenkrecht auf dieſe Gerade, und die andern beederſeits auf die Verlängerung derſelben A C, C E, B D, D F &c. an. Der erſte ſchneidet gleich anfänglich durch die Standlinie A B die Linien A N und B M ab, welche ſodann auf die Nebentiſche genau aufgetragen werden. Dieſe Nebentiſche beſtimmen wieder durch die Standlinien A N und B M in der Verlängerung von A B die Linien A C und B D, und ſodann für die folgenden Nebentiſche wieder D P und C Q u. ſ. f.

Jn

Jede zween Tiſche müſſen in der Geraden, welche beeden gemein iſt, mehrere Punkte und beſonders die beeden gemeinen Punkte einzelner Figuren genau beſtimmen; ferner muß jeder Tiſch vorwärts wieder in einer geraden Linie, welche durch Hauptpunkte richtig beſtimmet worden iſt, ſchließen, damit dieſe wieder auf den vorwärts folgenden Tiſch genau aufgetragen, und die Arbeit fortgeſeßet werden kann.

Iſt die ganze Gegend auf einer Seite der Geraden EF aufgenommen, ſo arbeitet man von ebendieſer Geraden an auch die andere Seite nach der nämlichen Methode aus, und ſeßet am Ende alle dieſe einzelnen Plane zuſammen; indem man den einen aus zween Nebenplanen nach der gemeinen Geraden abſchneidet, dem andern aber noch einen fingerbreiten Rand läßt, und jenen auf dieſen Rand mit Mundleim anklebet.

190. Soll man eine nach einem Projekte gegebene Figur abcde auf der Erde ausſtecken; ſo nimmt man das Erdreich, worauf die Figur auszuſtecken iſt, von neuem auf, trägt die Figur abcde nach den Bedingniſſen des Projektes dem Plane ein, zieht gleich anfangs jede Seite über den ganzen Tiſch aus, und ſtecket in beyden Enden derſelben zwo Nadeln ſenkrecht ein, nimmt ſodann AB auf der Erde gemäß ab, richtet 1tens den Tiſch über A nach AB, und ſtecket nach den Geſichtslinien ac, ad, ae die Geraden AC, AD, AE auf der Erde aus, richtet 2tens den Tiſch über B nach BA, und ſucht den Durchſchnitt C der Geſichtslinie bc, und der Geraden AC, endlich richtet man den Tiſch über C nach CB, und ſucht die Durchſchnitte D, E der Geſichtslinien cd, ce und der Geraden AD, AE. Fig. 221. 222.

wäre